

Índice General

1	Introducción.	3
2	Teorías masivas y ecuaciones de Toda no abelianas.	11
2.1	Ecuaciones de Toda no abelianas.	11
2.2	Teorías con acción real y positiva.	12
2.3	Teorías con un gap de masa.	15
2.4	Teorías sine–Gordon de espacios simétricos.	19
2.4.1	Modelos SSSG asociados a Λ_{\pm} regulares y no regulares.	19
2.4.2	Espectro de partículas fundamentales de los modelos split.	23
2.4.3	Realización de la base t^a de g para los modelos split.	25
2.4.4	Soluciones solitónicas de los modelos split.	29
2.5	Densidades conservadas clásicamente en modelos split.	37
2.5.1	Densidades conservadas clásicamente.	37
2.5.2	Densidades conservadas de spin 2.	39
2.5.3	Densidades conservadas de spin 4.	40
3	Clasificación y propiedades de los modelos split.	45
3.1	Modelos SSSG de tipo I: tres métodos para establecer su clasificación.	45
3.1.1	Ejemplos: $su(n)$, $so(n)$ y $sp(n)$	47
3.2	Relación entre modelos SSSG de tipo I e involuciones de \bar{g}	50
3.2.1	Modelos split de tipo $[A_1]$, $[A_2]$ y $[B]$	53
3.2.2	Dimensión conforme de la perturbación.	61
4	Cantidades conservadas cuánticamente.	71
4.1	Cantidades conservadas en CFT's perturbadas.	71
4.1.1	Ecuaciones de movimiento en CFT.	71
4.1.2	Ecuaciones de movimiento en CFT's perturbadas.	73
4.2	Factorizabilidad y ausencia de producción de partículas.	75
4.2.1	Cantidades conservadas.	76
4.2.2	Estados localizados y ausencia de producción de partículas.	78
4.2.3	Factorizabilidad.	80
4.3	Cantidades conservadas cuánticamente en modelos split.	81
4.3.1	Densidades conservadas de spin 2.	84
4.3.2	Densidades conservadas de spin 4.	88
5	Conclusiones.	105

A	Modelo de Wess–Zumino–Witten.	109
A.1	Propiedades del modelo de WZW.	112
B	Orden normal y relaciones entre OPE’s.	115
B.1	Prescripción de orden normal.	115
B.2	Densidades conservadas de spin 2.	116
B.3	Densidades conservadas de spin 4.	116
B.3.1	OPE’s entre las densidades de spin 4 y el campo primario.	116
B.3.2	Forma general de las densidades I_4	117
C	Características de las álgebras de Lie finitas.	121
D	Diagramas de Dynkin.	125
	Bibliografía.	131

Capítulo 1

Introducción.

Los objetivos que nos hemos planteado en el trabajo que se desarrolla en los siguientes capítulos han sido la clasificación sistemática y el estudio de la integrabilidad, tanto clásica como cuántica, de un conjunto de teorías de campos en 1+1-dimensiones incluidas en el grupo más amplio de las llamadas teorías de Toda no abelianas.

El concepto clásico de integrabilidad se resume en el teorema de Liouville que define un sistema integrable como un sistema Hamiltoniano con un espacio de fases $2N$ -dimensional que posee exactamente N cantidades independientes conservadas en involución. Es decir, si (q_i, p_i) con $i = 1, 2, \dots, N$ son las coordenadas canónicas y momentos del sistema, existen N cantidades conservadas Q_i tales que el corchete de Poisson entre dos cualesquiera de ellas es nulo:

$$\{Q_i, Q_j\} = 0, \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (1.0.1)$$

Por lo tanto podríamos considerar una transformación canónica,

$$Q_i = Q_i(q_j, p_j) = p_i, \quad (1.0.2)$$

de manera que las cantidades Q_i pasasen a ser los nuevos momentos. Las variables canónicas conjugadas asociadas a estos nuevos momentos serían de la forma:

$$\theta_i = \theta_i(q_j, p_j), \quad (1.0.3)$$

de modo que las ecuaciones de evolución del sistema pasarían a ser ahora:

$$\frac{dp_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta_i}{dt} = f_i(p_j), \quad (1.0.4)$$

y, puesto que los momentos p_j son conservados, la ecuación para las variables θ_i podría escribirse como:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = f_i = cte \Rightarrow \theta_i = f_i t + \alpha_i, \quad (1.0.5)$$

siendo α_i , $i = 1, \dots, N$ constantes de integración que dependen de las condiciones iniciales. Por lo tanto, la evolución estaría totalmente fijada en términos de las nuevas variables (θ_i, p_i) , que se denominan variables acción-ángulo. De hecho, de forma general, los sistemas clásicamente integrables se caracterizan por ser totalmente resolubles, lo que ha motivado históricamente el estudio de este tipo de modelos.

En cuanto a los sistemas continuos, es decir, con un número infinito de grados de libertad la caracterización es similar a la de los sistemas discretos, aunque para los primeros la integrabilidad exige la existencia de infinitas densidades conservadas en involución [37].

Una de las herramientas más utilizadas para la formulación de sistemas integrables es lo que se conoce como el *formalismo de los pares de Lax*. Un par de Lax (L, B) consiste en dos operadores dependientes de las variables dinámicas del sistema. En general, los sistemas clásicamente integrables están caracterizados por variables dinámicas cuyas ecuaciones de evolución son no lineales pero que, en términos de un par de Lax (L, B) pueden ser escritas como

$$\frac{dL}{dt} = [L, B]. \quad (1.0.6)$$

es decir, como una ecuación de evolución lineal para el operador L . La existencia de un par de Lax (L, B) que permita expresar una ecuación de evolución no lineal en la forma (1.0.6) implica automáticamente la existencia de un conjunto infinito de cantidades conservadas asociadas a la teoría y, por lo tanto, su integrabilidad clásica. Además el formalismo de los pares de Lax permite también una fácil construcción de dichas cantidades conservadas. Uno de los ejemplos más conocidos de teorías integrables que admiten una descripción de este tipo son las teorías de Toda de las que hablaremos más tarde.

Consideremos ahora la integrabilidad cuántica. Al igual que clásicamente, la integrabilidad cuántica de una teoría está asociada con la existencia de un conjunto infinito de cantidades conservadas. En $1 + 1$ -dimensiones, esto implica que la matriz-S que caracteriza a estos modelos posee dos importantes propiedades: que es factorizable, es decir, cualquier proceso de “scattering” con un número arbitrario de partículas en el estado inicial y en el estado final puede ser descompuesto en un conjunto de procesos de “scattering” de $2 \rightarrow 2$ partículas, y que no existe producción de partículas, es decir, en cualquier proceso de “scattering” el número de partículas en los estados inicial y final debe ser el mismo [13, 14, 11].

Aunque estas propiedades son restricciones muy fuertes a la forma de la matriz-S, sorprendentemente su comprobación no requiere demostrar la existencia de infinitas cargas conservadas, sino que la existencia de dos cargas de spin superior y diferente, tanto en módulo como en signo, es condición suficiente para concluir que la matriz-S es factorizable y que no existe producción de partículas [13].

Cuánticamente, las *Teorías de Campos Conformes* en 2 dimensiones constituyen uno de los ejemplos más importantes de modelos que poseen un conjunto infinito de cantidades conservadas. Como es bien sabido, las CFT’s describen el comportamiento crítico de sistemas estadísticos bidimensionales y poseen una simetría infinita que viene descrita por el grupo de transformaciones conformes. Cuando una CFT es perturbada añadiendo a su densidad lagrangiana un término adicional dado por un campo primario de la propia CFT, la simetría conforme original se rompe, pero existen elecciones particulares de la perturbación para las cuales la teoría perturbada sigue poseyendo un conjunto infinito de densidades conservadas, subconjunto de las existentes en la teoría no perturbada. Este tipo de modelos fue estudiado por primera vez por Zamolodchikov en [20] quien

propuso un método sistemático para determinar qué cantidades conservadas de una CFT lo siguen siendo cuando ésta es perturbada por un determinado campo primario y que es aplicable, en particular, al tipo de modelos que se estudian en esta tesina: las teorías de campos de Toda no abelianas, cuya acción es una perturbación de la acción del modelo de Wess–Zumino–Witten.

Una de las propiedades más características de las teorías clásicamente integrables es la existencia de soluciones solitónicas y multisolitónicas. Este tipo de configuraciones tienen un especial interés porque la interacción clásica entre solitones presenta propiedades muy similares a las de la interacción entre las partículas de la correspondiente teoría cuántica, la cual viene descrita por una matriz–S con las propiedades mencionadas anteriormente. Esto es debido a que los solitones, que son soluciones de ecuaciones de onda no lineales que se caracterizan por tener densidad de energía localizada y no dispersiva y, por lo tanto, energía finita, se asemejan a partículas extendidas y, en este sentido, cabe esperar que exista una correspondencia entre las soluciones solitónicas clásicas de una teoría y los estados de partículas extendidas de la versión cuántica de dicha teoría. De hecho, parte del espectro de partículas de la teoría cuántica se puede obtener mediante la cuantización semiclásica de las soluciones solitónicas, existiendo además una relación directa entre el límite semiclásico de la matriz–S y las soluciones solitónicas del scattering clásico [35], cuya descripción es muy sencilla y puede resumirse del siguiente modo:

En el pasado ($t \rightarrow -\infty$), una solución de N solitones tiene la forma de N solitones independientes con una velocidad dada, es decir, la densidad de energía $\epsilon(x, t)$ asociada a esta solución será de la forma

$$\epsilon(x, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \epsilon_0(x - a_i - u_i t), \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty, \quad (1.0.7)$$

donde $\epsilon_0(x - ut)$ es la densidad de energía correspondiente a una solución de tipo onda solitaria, por lo tanto está localizada y tiene una dependencia en $x - ut$ donde u es una cierta velocidad.

Tras la interacción, en el futuro ($t \rightarrow \infty$), la solución evoluciona a una configuración de N solitones con exactamente la misma distribución de velocidades, es decir

$$\epsilon(x, t) \rightarrow \sum_{i=1}^N \epsilon_0(x - a_i - u_i t + \delta_i), \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty, \quad (1.0.8)$$

lo que se refleja en la existencia de integrales de movimiento conservadas de spin superior.

Debido a la conservación del momento sólo el centro de masas de los solitones cambia, y un desplazamiento en el centro de masas de un solitón es equivalente a un adelanto o a un retardo temporal.

Por tanto, el scattering de N solitones puede entenderse como un conjunto de $\frac{N(N-1)}{2}$ interacciones entre dos solitones, cada una de las cuales produce un desplazamiento del centro de masas del sistema.

A nivel cuántico lo que sucede es realmente muy similar como consecuencia de la factorizabilidad de la matriz–S y de la ausencia de producción de partículas. Estas propiedades se derivan de nuevo de la existencia de un conjunto infinito de densidades

cuánticamente conservadas. La existencia de tales densidades conservadas permite esencialmente transformar cualquier proceso de scattering con N partículas iniciales y M partículas finales en un conjunto de procesos de scattering de pares de partículas independientes entre sí y demostrar que necesariamente $N = M$.

El argumento más intuitivo que permite entender esto consiste en representar las partículas interaccionantes como paquetes de ondas, de modo que la interacción entre partículas es equivalente al solapamiento de sus paquetes de onda asociados [14]. La existencia de densidades conservadas de spin superior significa que la matriz de scattering total del proceso debe ser invariante bajo una transformación generada por estas cargas, la cual tiene como efecto un desplazamiento arbitrario de los centros de los paquetes de onda que representan a las partículas interaccionantes, permitiendo en particular que estén tan separados entre sí como queramos.

La única complicación adicional con respecto a la situación clásica se debe a la posibilidad de degeneración en las masas de las partículas de la teoría que implica la necesidad de sumar sobre todos los posibles estados intermedios en cada uno de los procesos de $2 \rightarrow 2$ partículas. Por otra parte, lo que a nivel clásico era un retardo o adelanto temporal se transforma ahora en una fase no trivial cuyo límite semiclásico está directamente relacionado con el tiempo de retardo.

Una vez hecho este breve repaso sobre las características generales de los sistemas clásica y cuánticamente integrables debemos pasar a describir el conjunto de teorías en las que nos hemos concentrado. Los modelos que se estudian en esta tesis son ejemplos de *Teorías de Campos de Toda no abelianas*, modelos que constituyen una generalización al caso no abeliano de las *Teorías de Campos de Toda abelianas* cuyas ecuaciones de movimiento se denominan *ecuaciones de campo de Toda*. Estas ecuaciones de Toda son a su vez generalizaciones, en forma de ecuaciones integrables en dos dimensiones, de uno de los ejemplos más sencillos de modelos integrables clásicamente: *la red de Toda*.

La red de toda es un sistema mecánico discreto que consiste en un conjunto de N masas puntuales colocadas a lo largo de una recta cuya interacción es de tipo exponencial. Si de nuevo (q_i, p_i) son las coordenadas canónicas y momentos del sistema, las ecuaciones de movimiento que lo caracterizan son de la forma

$$\begin{aligned}\partial_t q_i &= p_i, \\ \partial_t p_i &= e^{-(q_i - q_{i-1})} - e^{-(q_{i+1} - q_i)},\end{aligned}\tag{1.0.9}$$

para $i = 1, \dots, N$, con $q_0 = -\infty$, y $q_{N+1} = \infty$.

Tal y como hemos mencionado en la primera parte de esta introducción, es posible formular estas teorías en términos de un par de Lax. Para ello es conveniente hacer el siguiente cambio de variables:

$$a_i = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}(q_{i+1} - q_i)}, \quad \text{para } i = 1, \dots, N-1,\tag{1.0.10}$$

$$b_i = \frac{1}{2} p_i \quad \text{para } i = 1, \dots, N.\tag{1.0.11}$$

Con estas nuevas variables las ecuaciones de movimiento pueden ahora escribirse en función de un par de Lax

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & -a_2 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -a_{N-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{N-1} & 0 \end{pmatrix}$$

en la forma (1.0.6).

En función del operador de Lax L es posible construir las cantidades

$$H_p = \frac{1}{p} \text{Tr} L^p, \quad \text{para } p = 1, \dots, N, \quad (1.0.12)$$

y es sencillo comprobar que dichas cantidades son conservadas. En particular H_1 es el momento en centro de masas del sistema y H_2 es proporcional al Hamiltoniano.

Las ecuaciones de campo de Toda son generalizaciones del modelo anterior que resultan de añadir al conjunto discreto de coordenadas canónicas $q_i(t)$ una dependencia en x de la forma $q_i(x, t)$. Las nuevas variables $q_i(x, t)$ están asociadas de forma natural con la subálgebra de Cartan de $SU(N)$ y pueden ser finalmente agrupadas en un campo $h(x, t)$.

El campo $h(x, t)$ toma valores en un determinado grupo de Lie. Si este grupo de Lie es abeliano (CSA de otro grupo de Lie) hablaremos de ecuaciones de Toda abelianas mientras que si el grupo es no abeliano las teorías se denominan de Toda no abelianas. Ambos tipos de teorías están caracterizadas por una acción de la forma

$$S[h] = \frac{1}{\beta^2} \left\{ S_{WZW} - \frac{m^2}{\pi} \int d^2x V(h) \right\}, \quad (1.0.13)$$

donde S_{WZW} es la acción de Wess–Zumino–Witten ó bien la acción correspondiente a bosones libres en el caso de que el álgebra de Lie sea abeliana, y $V(h)$ es un potencial que depende de ciertos elementos constantes que toman valores en un álgebra de Lie \bar{g} .

Las teorías de Toda abelianas son las más conocidas y pueden clasificarse en tres grupos, en función de que la CSA en la que toma valores el campo $h(x, t)$ pertenezca a un álgebra de Lie finita o infinita:

- Si el álgebra de partida es finita, las teorías de Toda correspondientes se denominan *Teorías de Toda Conformes*, son invariantes conformes y el álgebra de sus generadores de simetría es un álgebra W (extensión no lineal del álgebra de Virasoro mediante campos primarios).
- Si el álgebra de partida es un álgebra de Kac–Moody afín (sin extensión central ni derivación) las teorías resultantes se denominan de *Toda Afines abelianas*. Estas teorías son masivas y, siguiendo el método propuesto por Zamolodchikov en [20] que se resume en el capítulo 4 de esta tesina, pueden ser descritas como teorías de WZW perturbadas que únicamente poseen soluciones solitónicas cuando la constante de acoplamiento β es puramente imaginaria. Un ejemplo de este tipo de teorías es el modelo de sine–Gordon.

- Si a partir de los modelos anteriores se desea obtener teorías con simetría conforme el modo de hacerlo es la introducción de campos gauge auxiliares asociados a la extensión central y derivación del álgebra afín. Las teorías que surgen de este modo se denominan teorías de *Toda Afines Conformes*. Otro modo de definir las sería decir que son las teorías cuya ruptura espontánea de simetría da lugar a las Todas afines.

Las teorías de Toda afines abelianas son uno de los ejemplos de modelos integrables más estudiados y también la única familia de las tres anteriores que es masiva. Su formulación en términos de ecuaciones de curvatura nula es fácilmente generalizable al caso en que el campo de la teoría toma valores en un grupo de Lie no abeliano, generalización que da lugar a las denominadas teorías de Toda no abelianas que incluyen, entre otros, a los modelos que se han estudiado en esta tesina.

La generalización de las teorías de Toda afines abelianas a teorías de Toda afines no abelianas puede llevarse a cabo de diferentes modos:

- El modo más general, que es precisamente el que nosotros hemos utilizado, asocia distintos tipos de ecuaciones de movimiento para cada posible gradación de un álgebra de Lie afín \bar{g} determinada por un automorfismo de orden finito.
- Otro método menos general pero bien conocido en la literatura es el propuesto por Leznov y Saveliev [5] que se utiliza en [6]. Este método consiste en realizar “embeddings” de una subálgebra $sl(2, \mathbb{C}) = \{J_{\pm}, J_0\}$ en un álgebra de Lie finita \bar{g} de manera que el elemento J_0 induzca en \bar{g} una gradación cuya subálgebra invariante sea precisamente aquella en cuyo grupo de Lie asociado toma valores el campo de la teoría $h(x, t)$. El potencial $V(h)$ depende de J_{\pm} y de dos elementos constantes Y_{\pm} de grado máximo y mínimo con respecto a la gradación anteriormente mencionada. La libertad existente tanto en la elección de estos elementos como en la elección del propio “embedding” es muy grande y da por lo tanto lugar a un gran número de modelos diferentes para una misma álgebra de Lie de partida. No obstante, no todas las gradaciones de \bar{g} pueden ser descritas de este modo, por lo que el primer método nos permite construir un número aún mayor de teorías.

Considerando entonces la primera de estas dos posibilidades, la acción asociada a las teorías de Toda no abelianas tiene la forma (1.0.13) con un potencial

$$V(h) = -\langle \Lambda_+, h^\dagger \Lambda_- h \rangle, \quad (1.0.14)$$

donde \langle , \rangle es la forma bilineal asociada a un álgebra de Lie compleja, semisimple y finita \bar{g} sobre la cual actúa un automorfismo de orden finito σ induciendo una gradación tal que el campo $h(x, t)$ de la teoría toma valores en el subgrupo asociado a la subálgebra invariante bajo dicho automorfismo. Por otra parte Λ_{\pm} son elementos semisimples constantes que toman valores en los subespacios de grados k y $N - k$ donde N es el orden del automorfismo y k es cierto número entero, comprendido entre 0 y $N - 1$.

Una vez construidas las teorías de Toda afines no abelianas el siguiente paso es seleccionar, de entre el conjunto de modelos que surgen, aquellos que tengan acción real y positiva y sean además puramente masivos, para que admitan a nivel cuántico una

descripción en términos de la matriz-S. Todas estas condiciones suponen que, tanto la elección del automorfismo σ como la de los elementos Λ_{\pm} están muy restringidas (ver tabla (2.1)).

En particular, la clasificación de todos estos modelos fue realizada en [1] y dio como resultado dos series de teorías, además de las teorías de Toda abelianas con constante de acoplamiento real:

- las teorías *Homogéneas de sine-Gordon* (HSG), asociadas con el automorfismo identidad,
- las teorías de *sine-Gordon asociadas a Espacios Simétricos* (SSSG), correspondientes a involuciones de \bar{g} .

Las primeras son generalizaciones del modelo de sine-Gordon complejo y las segundas del modelo de sine-Gordon, por ello es lógico pensar que la cuantización de los modelos HSG y SSSG siga un esquema similar a la de éstos. De hecho los modelos HSG han sido estudiados en detalle en [2] y [3] obteniéndose un espectro puramente solitónico a nivel clásico cuya cuantización genera configuraciones tanto estables como inestables. La descripción de los modelos HSG ha permitido asegurar la existencia de un único vacío, módulo transformaciones gauge, lo cual permite también decir que las cargas conservadas asociadas a estos modelos son siempre de tipo Noether y no topológicas. En cuanto a los modelos SSSG, se espera en general la existencia de soluciones solitónicas y, en particular, en esta tesina hemos construido algunas de ellas para los *Modelos Split*, un subconjunto de estas teorías cuyas características se explican más tarde.

En el caso de los modelos HSG la condición de que la teoría tenga un gap de masa exige que los elementos Λ_{\pm} han de ser siempre regulares, o lo que es lo mismo, el conjunto de elementos de \bar{g} que conmutan con Λ_{\pm} debe coincidir con una CSA de \bar{g} . Para los modelos SSSG Λ_{\pm} pueden ser tanto regulares como no regulares con lo cual existe mayor variedad de teorías, como se explica también en el capítulo 2.

De hecho, sin considerar ya la diferencia entre las teorías con Λ_{\pm} regulares o no regulares, existe una primera clasificación de los modelos SSSG:

- Modelos *SSSG de tipo I*, asociados a un álgebra de Lie g simple y compacta que se descompone, bajo el automorfismo σ como $g = g_0 \oplus g_1$.
- Modelos *SSSG de tipo II*, asociados a un álgebra de Lie g semisimple y compacta que se descompone, bajo el automorfismo σ , como $g = g_1 \oplus g_2$, siendo $g_1 = g_2$ ideales simples, y σ es un automorfismo involutivo que intercambia estas dos subálgebras.

De entre todos estos modelos nuestro trabajo se ha centrado en el estudio de la integrabilidad y la clasificación de algunos de ellos que están asociados a elementos Λ_{\pm} regulares y que son especialmente sencillos porque su acción resulta ser una perturbación del modelo de WZW para el grupo compacto G_0 . Estos modelos son un subconjunto de los de tipo I y los hemos denominado Modelos Split.

Más concretamente, el trabajo que se desarrolla en los siguientes capítulos es el siguiente:

- En el capítulo 2, basándonos en las referencias [1] y [2], se presenta una introducción en la cual, partiendo de la acción general asociada a los modelos de Toda no abelianos, hemos destacado que las correspondientes ecuaciones de movimiento, a nivel clásico, admiten una expresión en forma de ecuaciones de curvatura nula lo cual hace aplicable a este caso el procedimiento de Drinfel'd–Sokolov [4] para la obtención sistemática de las densidades conservadas clásicamente. Asimismo también presentamos la clasificación de estas teorías en modelos HSG y SSSG y las características principales de cada uno de ellos, además de dar una descripción detallada de los posibles tipos de modelos SSSG. Concentrándonos ya en los modelos split:
 - Hemos identificado los espacios simétricos G/G_0 con los que están asociados (uno por cada álgebra de Lie simple y compleja).
 - Hemos descrito el espectro de partículas fundamentales asociadas con estos modelos y hemos obtenido algunas de las soluciones solitónicas mediante el “embedding” de un solitón de sine–Gordon en G_0 .
Hemos encontrado que, asociados con cada raíz positiva del álgebra de Lie \bar{g} existen una partícula fundamental y un conjunto de solitones consistente en un solitón, un antisolitón y un conjunto de “breathers” de tipo sine–Gordon.
 - Hemos revisado el procedimiento de Drinfel'd–Sokolov para la obtención sistemática de las densidades clásicamente conservadas, calculando las correspondientes a spines ± 2 y ± 4 para los modelos split.
- En el capítulo 3 hemos llevado a cabo la clasificación de todos los modelos split utilizando para ello la clasificación de los espacios simétricos de tipo I que se presenta en [32] con los cuales están asociados. La conexión existente entre modelos SSSG de tipo I e involuciones de la complejificación de g nos proporciona un procedimiento sistemático para la determinación de la dimensión conforme del campo primario que actúa como perturbación.
- En el capítulo 4 se estudia la integrabilidad cuántica de los modelos split, utilizando el argumento de Parke [13] según el cual es suficiente comprobar la existencia de dos densidades conservadas de spin superior para probar la integrabilidad. El método propuesto por Zamolodchikov en [20], aplicable a aquellas teorías cuya acción es la suma de la de una CFT y de una perturbación dada por un campo primario asociado a dicha CFT, nos ha permitido obtener las densidades cuánticamente conservadas de spin 2 y una densidad conservada de spin 4, así como sus correspondientes densidades asociadas de spines -2 y -4 . Estos resultados nos permiten asegurar la integrabilidad cuántica de los modelos split.

Capítulo 2

Teorías masivas y ecuaciones de Toda no abelianas.

Las teorías de las que vamos a ocuparnos se caracterizan por sus ecuaciones de movimiento, que son ecuaciones de Toda no abelianas. La descripción y clasificación que de ellas presentaremos a continuación se deben a C. R. Fernández-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood y J. L. Miramontes y pueden encontrarse en las referencias [1, 2, 3].

La acción de estas teorías es una perturbación de la acción del conocido modelo de Wess–Zumino–Witten [7, 8], la cual rompe la simetría conforme pero preserva la integrabilidad clásica, cosa que se manifiesta en la existencia de un conjunto infinito de densidades conservadas que pueden ser obtenidas sistemáticamente mediante la, así llamada construcción de Drinfel’d–Sokolov.

2.1 Ecuaciones de Toda no abelianas.

Las teorías de Toda no abelianas pueden ser descritas, de forma general, mediante una acción de la forma:

$$S[h] = \frac{1}{\beta^2} \left\{ S_{WZW}[h] - \frac{m^2}{\pi} \int d^2x V(h) \right\}, \quad (2.1.1)$$

donde el término cinético $S_{WZW}[h]$ es la acción del modelo de Wess–Zumino–Witten (WZW) para un grupo G_0 y β es una constante de acoplamiento que, a nivel cuántico, para G_0 compacto y no abeliano¹[6], está cuantizada cuando la teoría cuántica esté bien definida². En el apéndice A se describen las características más importantes del modelo de WZW, así como la razón de esta cuantización.

El grupo \bar{G}_0 , en el cual toman valores los campos de la teoría, es un grupo de Lie asociado a un álgebra de Lie \bar{g}_0 que se define del siguiente modo; si \bar{g} es un álgebra de

¹De aquí en adelante denotaremos por \bar{g} y g a un álgebra de Lie compleja y a su forma real compacta y por \bar{G} y G a los grupos de Lie asociados.

²Al cuantizar la teoría $1/\beta^2 \rightarrow (\hbar k)$, donde k es el nivel de la representación del álgebra de Kac–Moody, que toma valores enteros positivos.

Lie compleja, semisimple y finita, y σ es un automorfismo de orden N finito de \bar{g} , este automorfismo induce una gradación $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ en \bar{g} , que cumple las siguientes relaciones:

$$\bar{g} = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \bar{g}_j, \quad [\bar{g}_j, \bar{g}_k] \subset \bar{g}_{j+k}, \quad (2.1.2)$$

donde, $\sigma(a) = \exp(2\pi i j/N)a$, siendo a cualquier elemento contenido en \bar{g}_j , y $\bar{j} = j$ módulo N . \bar{G}_0 es el grupo de Lie asociado a la subálgebra invariante bajo el automorfismo σ .

Por otra parte, el potencial $V(h)$ tiene la forma³

$$V(h) = -\langle \Lambda_+, h^{-1}\Lambda_-h \rangle, \quad (2.1.3)$$

donde Λ_{\pm} son dos elementos ad-diagonalizables tales que $\Lambda_+ \in \bar{g}_k$ y $\Lambda_- \in \bar{g}_{N-k}$, para cierto k entero y no negativo.

La variación de la acción (2.1.1) con respecto a $h(x, t)$ ó $h^{-1}(x, t)$ proporciona las ecuaciones de movimiento de nuestro sistema,

$$\partial_-(h^{-1}\partial_+h) = -m^2[\Lambda_+, h^{-1}\Lambda_-h], \quad (2.1.4)$$

$$\partial_+(\partial_-hh^{-1}) = -m^2[h\Lambda_+h^{-1}, \Lambda_-], \quad (2.1.5)$$

donde $x_{\pm} = t \pm x$ son las coordenadas en el cono de luz y m es una constante con dimensiones de masa y ambas ecuaciones son equivalentes entre sí.

La integrabilidad clásica [37] de estas ecuaciones de Toda se manifiesta en el hecho de que admiten una expresión en forma de ecuaciones de curvatura nula

$$[\partial_+ + h^{-1}\partial_+h + im\Lambda_+, \partial_- + imh^{-1}\Lambda_-h] = 0, \quad (2.1.6)$$

lo que hace posible demostrar la existencia de infinitas densidades conservadas clásicamente utilizando la construcción de Drinfel'd-Sokolov [4], que luego particularizaremos para el conjunto de modelos que se han estudiado en este trabajo.

2.2 Teorías con acción real y positiva.

La anterior construcción de las ecuaciones de Toda no abelianas tiene sentido para cualquier elección de $\{\bar{g}, \sigma, \Lambda_{\pm}\}$ y, en función de dicha elección, se pueden obtener diferentes tipos de modelos. De todos estos modelos estamos interesados en aquellos cuya acción sea real y cuyo término de energía cinética tenga signo definido positivo.

Si deseamos tener teorías de campos unitarias deberemos imponer que la acción sea real, lo cual implica que $h \in G_0$, donde G_0 es un grupo de Lie real cuya álgebra asociada \mathfrak{g}_0 es una forma real de $\bar{\mathfrak{g}}_0$.

Pero ésta no es condición suficiente, ya que deseamos tener un término cinético con signo definido y esto implica restricciones en la elección de la forma real \mathfrak{g}_0 , que son

³En \bar{g} la forma bilineal invariante y no degenerada se representará como \langle , \rangle y estará normalizada de tal modo que las raíces largas de \bar{G}_0 , Ψ_{g_0} , tengan siempre longitud $\sqrt{2}$.

diferentes, en función de que este álgebra sea abeliana, no abeliana ó reductiva, como es nuestro caso.

- Si g_0 es una subálgebra no abeliana y semisimple la energía cinética tiene signo definido si y sólo si g_0 es la forma real compacta de \bar{g}_0 , lo cual significa que la forma bilineal es definida negativa. En este caso, si $h \in G_0$ es de la forma general $h = e^{i\Phi}$, la elección de la forma real compacta asegura que $h^\dagger = h^{-1}$, es decir h es unitario.
- Si g_0 es una subálgebra abeliana siempre es posible elegir la forma bilineal con signo definido, tanto positivo como negativo.

Si elegimos el signo positivo, nos encontramos ante una situación similar a la del caso anterior y las teorías resultantes son las llamadas Todas con constante de acoplamiento imaginaria. Esto se debe a que si la forma bilineal es definida positiva la proporcionalidad del término cinético a $1/\beta^2$ hace que sólo eligiendo β imaginaria pura (con cuadrado negativo) se obtenga un término cinético definido positivo. El ejemplo más conocido de este tipo de teorías es el modelo de sine–Gordon.

Si por el contrario elegimos la forma bilineal definida negativa deberemos tomar una constante de acoplamiento β real para que la energía cinética sea definida positiva. Por eso las teorías resultantes se denominan Todas con constante de acoplamiento real y para éstas los elementos $h \in G_0$ son hermíticos, es decir, $h^\dagger = h$.

- En nuestro caso el álgebra g_0 no es de ninguno de los dos tipos anteriores sino una mezcla, es decir, tiene la forma general:

$$g_0 = g_{ss} \oplus u(1) \oplus \cdots \oplus u(1), \tag{2.2.7}$$

donde g_{ss} es un álgebra de Lie semisimple y no abeliana. Se dice entonces que g_0 es reductiva.

En este caso la forma bilineal será la forma real compacta para g_{ss} y para los generadores $u(1)$ se elegirá la forma real definida negativa, de manera que al tomar la forma real compacta para el álgebra de partida g , la forma real de g_0 es también definida negativa.

Por todo lo explicado anteriormente, también en este caso el campo $h(x, t)$ será unitario y esta propiedad sólo es consistente con las ecuaciones de movimiento si se verifica la igualdad $\Lambda_\pm^\dagger = \Lambda_\pm$, la cual asegura además que el potencial $V(h)$ es real, es decir $V(h) = V(h)^*$. Como $\Lambda_+, \Lambda_-^\dagger \in g_{\bar{k}}$ y $\Lambda_-, \Lambda_+^\dagger \in g_{\overline{N-k}}$, debe cumplirse que $\overline{2k} = 0$.

Esta última condición, junto con la condición de que las teorías resultantes sean puramente masivas, impone restricciones muy fuertes sobre el orden que puede tener un automorfismo σ que caracterice a una teoría con acción real y positiva. El resultado es, de hecho, la existencia de dos únicas posibilidades no equivalentes:

$$\sigma = I \quad \text{ó} \quad \sigma^2 = I. \tag{2.2.8}$$

La primera clase de teorías, con $\sigma = I$, son teorías tales que $g = g_{\bar{0}}$, siendo g un álgebra de Lie compacta y semisimple, y se denominan modelos homogéneos de sine–Gordon (HSG) [2, 3].

La segunda clase de teorías se caracteriza por la descomposición:

$$g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}, \quad (2.2.9)$$

que satisface las siguientes reglas de conmutación:

$$[g_{\bar{0}}, g_{\bar{0}}] \subset g_{\bar{0}}, \quad [g_{\bar{0}}, g_{\bar{1}}] \subset g_{\bar{1}}, \quad \text{y} \quad [g_{\bar{1}}, g_{\bar{1}}] \subset g_{\bar{0}}, \quad (2.2.10)$$

lo cual implica que estas teorías están asociadas con espacios simétricos [32, 33].

Recordemos que un espacio simétrico compacto está caracterizado por un par (g, σ) , que cumple las siguientes condiciones:

- g es un álgebra de Lie real y compacta.
- σ es un automorfismo involutivo que permite la descomposición del álgebra g en subálgebras asociadas a autovalores ± 1 de σ , $g = g_0 \oplus g_1$.
- g_0 , el conjunto de puntos fijos bajo el automorfismo σ , es una subálgebra compacta de g .
- $g_0 \cap \text{centro}(g) = 0$.

Las teorías caracterizadas por las relaciones (2.2.9) y (2.2.10) se conocen como modelos de sine–Gordon de espacios simétricos (SSSG) y están asociadas con espacios simétricos compactos del tipo G/G_0 , donde G es la forma real compacta del grupo asociado al álgebra de Lie g .

De acuerdo con la clasificación de Cartan, los espacios simétricos compactos pueden ser de dos tipos⁴:

- *Espacios simétricos de tipo I.*
Están asociados a un álgebra de Lie compacta y simple g y a un automorfismo involutivo σ .
- *Espacios simétricos de tipo II.*
Están asociados a un álgebra de Lie compacta y semisimple $g = g_1 \oplus g_2$, con $g_1 = g_2$ y a un automorfismo involutivo σ que intercambia estas dos subálgebras.

Debido a la clasificación anterior los modelos SSSG se descomponen a su vez en dos grupos, llamados modelos SSSG de tipo I y de tipo II, en función del tipo de espacio simétrico al que estén asociados pero, en ambos casos, tal espacio simétrico es de tipo compacto.

⁴Cuando decimos que los espacios simétricos compactos son de dos tipos queremos decir realmente que cualquier espacio simétrico compacto puede descomponerse en suma directa de espacios simétricos de los tipos I y II (ver capítulo 8 de [32]).

Las ecuaciones de movimiento de los modelos SSSG fueron estudiadas a finales de los años 70 [29] pero el estudio general de su formulación lagrangiana fue llevado a cabo por vez primera en [25], aunque en este artículo no se estudia ni la integrabilidad cuántica de estos modelos ni su espectro. Asimismo, un ejemplo particular, correspondiente al espacio simétrico $SU(3)/SO(3)$ fue estudiado en detalle por V.A. Brazhnikov en [26].

A partir de ahora nuestro interés se centrará en los modelos SSSG de tipo I y, en particular, en los asociados a espacios simétricos de rango maximal que denominaremos modelos split.

Las condiciones que hemos impuesto a nuestros modelos suponen importantes restricciones para el álgebra g , para los elementos Λ_{\pm} y para el automorfismo σ . Estas restricciones son aún mayores si estamos interesados en teorías que admitan una descripción en términos de la matriz-S, lo cual es equivalente a seleccionar, de entre todos los anteriores modelos, aquellos que correspondan a teorías puramente masivas. Esto es lo que vamos a hacer en la siguiente sección.

2.3 Teorías con un gap de masa.

El potencial $V(h)$ tiene una simetría global de la forma:

$$V(\alpha_L h \alpha_R) = V(h), \quad (2.3.11)$$

para todo par de elementos $\alpha_{L,R}$ pertenecientes a los grupos $G_{L,R}$, que son los grupos asociados a las subálgebras

$$g_L = Ker(ad_{\Lambda_-}) \cap g_{\bar{0}}, \quad g_R = Ker(ad_{\Lambda_+}) \cap g_{\bar{0}}, \quad (2.3.12)$$

es decir, $V(h)$ tiene una simetría global $G_L \times G_R$. Esto implica que la teoría cuántica correspondiente a la acción (2.1.1) podría incluir en su espectro partículas de masa nula, cosa que deseamos evitar.

Debido al carácter semisimple de los elementos Λ_{\pm} se puede asegurar que el álgebra de Lie g tiene las dos siguientes descomposiciones ortogonales con respecto a sus acciones adjuntas⁵:

$$g = Ker(ad_{\Lambda_{\pm}}) \oplus Im(ad_{\Lambda_{\pm}}), \quad (2.3.13)$$

esto implica que, de acuerdo con las ecuaciones de movimiento (2.1.4) y (2.1.5), las configuraciones de campos tales que

$$h^{\dagger} \partial_+ h \in Ker(ad_{\Lambda_+}) \cap g_{\bar{0}} \quad \text{ó} \quad \partial_- h h^{\dagger} \in Ker(ad_{\Lambda_-}) \cap g_{\bar{0}}, \quad (2.3.14)$$

corresponden a direcciones planas del potencial.

Por lo tanto, si queremos eliminar dichas direcciones planas, debemos tratar de introducir de algún modo las condiciones

$$P_R(h^{\dagger} \partial_+ h) = P_L(\partial_- h h^{\dagger}) = 0, \quad (2.3.15)$$

⁵ $Ker(ad_{\Lambda_{\pm}})$ es el centralizador de Λ_{\pm} en g , es decir, el conjunto de elementos $x \in g$, tales que $[x, \Lambda_{\pm}] = 0$, por otra parte $Im(ad_{\Lambda_{\pm}})$ es la imagen de Λ_{\pm} en g , es decir, el conjunto de elementos $x \in g$, que se pueden escribir como $x = [y, \Lambda_{\pm}]$ para algún $y \in g$.

donde $P_{L,R}$ son los operadores de proyección en las subálgebras (2.3.12).

El modo más natural de introducir nuevas ligaduras en una teoría es mediante una simetría gauge. Supongamos entonces que pudiésemos gaugear todos los grados de libertad correspondientes a direcciones planas del potencial, es decir, que pudiésemos introducir una invariancia gauge local en la teoría.

Recordemos que estos modelos poseen una simetría quiral del tipo $G_L(x_+) \times G_R(x_-)$, por lo tanto introducir una simetría gauge sería equivalente a extender, al menos en parte, la simetría quiral original a una simetría gauge local. Esto implicaría la introducción en la acción original de campos gauge, los cuales satisfarían ciertas ecuaciones de movimiento. Cuando fijásemos el gauge, haciendo una elección particular para los campos, estas ecuaciones de movimiento se convertirían en ligaduras adicionales para el campo $h(x, t)$ de la teoría.

La pregunta es entonces, ¿qué condiciones tienen que satisfacer los grupos $G_{L,R}$ para que sea posible introducir una simetría gauge que elimine todas las direcciones planas del potencial y tal que, al fijar el gauge de un cierto modo, las ecuaciones de movimiento para los campos gauge se reduzcan a las condiciones (2.3.15)?

Para responder a esta pregunta primeramente hay que identificar qué tipo de transformaciones de simetría es posible gaugear. De acuerdo con [28] será posible gaugear aquellos grados de libertad asociados con un subgrupo H común a G_L y G_R , realizando un “embedding” de este subgrupo en el grupo de simetría $G_L \times G_R$ de la forma:

$$\alpha \mapsto (\alpha_L, \alpha_R), \quad (2.3.16)$$

que nos permita introducir una invariancia gauge local

$$h \mapsto \alpha_L(x, t)h\alpha_R^\dagger(x, t) \quad (2.3.17)$$

en nuestros modelos.

En nuestro caso se observa que para que sea posible gaugear todos los grados de libertad correspondientes a direcciones planas del potencial, los elementos Λ_\pm deben de ser elegidos de tal manera que $g_L = g_R = g_0^0$, es decir, en este caso $H = G_{L,R}$ y por lo tanto deseamos extender toda la simetría quiral original a una simetría gauge.

Las transformaciones gauge más generales que es posible gaugear fueron determinadas en [1] y son de la forma:

$$h \rightarrow \alpha h \hat{\tau}(\alpha^\dagger), \quad (2.3.18)$$

donde τ es un automorfismo genérico de g_0^0 que se relaciona con su correspondiente automorfismo $\hat{\tau}$ en el grupo G_0^0 del siguiente modo:

$$\hat{\tau}(e^{i\Phi}) = e^{i\tau(\Phi)}, \quad (2.3.19)$$

para todo $i\Phi \in g_0^0$.

Para gaugear las transformaciones (2.3.18) es necesario introducir campos gauge A_\pm que tomen valores en g_0^0 y sustituir la acción $S_{WZW}[h]$ en (2.1.1) por la acción de WZW gaugeada $S_{WZW}[h, A_\pm]$ asociada al coset G_0/G_0^0 . La acción invariante gauge resultante tiene la forma

$$S[h, A_\pm] = \frac{1}{\beta^2} \left\{ S_{WZW}[h, A_\pm] - \frac{m^2}{\pi} \int d^2x V(h) \right\}, \quad (2.3.20)$$

donde la acción de WZW gaugeada [24] es

$$S_{WZW}[h, A_{\pm}] = S_{WZW}[h] + \frac{1}{\pi} \int d^2x \left(-\langle A_+, \partial_- h h^\dagger \rangle + \langle \tau(A_-), h^\dagger \partial_+ h \rangle + \langle h^\dagger A_+ h, \tau(A_-) \rangle - \langle A_+, A_- \rangle \right), \quad (2.3.21)$$

y el campo gauge transforma como:

$$A_{\pm} \mapsto \alpha A_{\pm} \alpha^\dagger - \partial_{\pm} \alpha \alpha^\dagger. \quad (2.3.22)$$

Las ecuaciones de movimiento que se siguen de la variación de la acción (2.3.21) con respecto a h admiten también una forma de curvatura nula

$$[\partial_+ + h^\dagger \partial_+ h + im\Lambda_+ + h^\dagger A^+ h, \partial_- + \tau(A_-) + imh^\dagger \Lambda_- h] = 0. \quad (2.3.23)$$

y la variación de la acción (2.3.20) con respecto a los campos gauge da como resultado las ecuaciones

$$P(h^\dagger \partial_+ h + h^\dagger A_+ h) - \tau(A_+) = 0, \quad (2.3.24)$$

$$P(-\partial_- h h^\dagger + h \tau(A_-) h^\dagger) - A_- = 0, \quad (2.3.25)$$

donde P es el proyector en el subgrupo G_0^0 . Proyectando (2.3.23) en g_0^0 y usando (2.3.24) y (2.3.25), podemos ver que el campo gauge es plano, es decir:

$$[\partial_+ + A_+, \partial_- + A_-] = 0. \quad (2.3.26)$$

Para demostrar que las condiciones (2.3.24) y (2.3.25) realmente eliminan las direcciones planas del potencial es suficiente con elegir ahora el gauge $A_{\pm} = 0$, cosa que es consistente debido a (2.3.26). En este gauge, podemos comprobar que las condiciones (2.3.24) y (2.3.25) se reducen justamente a (2.3.15) coincidiendo también las ecuaciones de movimiento (2.3.23) y (2.1.6).

Tenemos por tanto lo que queríamos, las mismas ecuaciones de movimiento con las restricciones (2.3.15) que eliminan las direcciones planas del potencial.

De acuerdo con las ecuaciones de movimiento (2.1.4) y (2.1.5), el potencial (2.1.3) tiene extremos cuando

$$[\Lambda_+, h_0^\dagger \Lambda_- h_0] = 0, \quad (2.3.27)$$

y alcanzará un mínimo absoluto para cierta configuración de campos h_0 correspondiente al vacío. Las partículas estarán asociadas a las fluctuaciones en torno a esta configuración de vacío.

El éxito del anterior procedimiento para construir una teoría con una gap de masa requiere que todas las direcciones planas del potencial alrededor del vacío h_0 , excepto aquellas que lo dejan invariante y que están asociadas con una simetría gauge residual, correspondan simplemente a transformaciones gauge. Es decir, para cualesquiera $i\Phi, i\Psi \in g_0^0$, con $\Phi^\dagger = \Phi$ y $\Psi^\dagger = \Psi$, debe ser posible encontrar $i\eta \in g_0^0$, tal que

$$e^{i\Phi} h_0 e^{i\Psi} = e^{i\eta} h_0 e^{-i\tau(\eta)}. \quad (2.3.28)$$

A partir de esta condición se obtiene la siguiente restricción para el automorfismo τ :

$$\tau(u) \neq h_0^\dagger u h_0, \quad (2.3.29)$$

para todo elemento $u \in g_0^0$. Esta condición implica que, por ejemplo, no será posible construir teorías masivas con transformaciones gauge vectoriales ($\tau = I$) si la configuración de vacío corresponde a $h_0 = I$.

Además de todo esto, existe una condición adicional que la configuración de vacío h_0 tiene que satisfacer que es la siguiente:

$$h_0^\dagger g_0^0 h_0 = g_0^0. \quad (2.3.30)$$

Por lo tanto, h_0 tiene que inducir un automorfismo interno de $g_{\bar{0}}$ que fije la subálgebra g_0^0 .

Las condiciones (2.3.29) y (2.3.30) implican que $\rho(u) = h_0 \tau(u) h_0^\dagger$ define un automorfismo de g_0^0 que no puede dejar fijo ningún elemento de g_0^0 . Esta condición resulta ser tan restrictiva que permite concluir que el álgebra de Lie g_0^0 debe ser abeliana [2].

En el caso de los modelos HSG, la condición de que g_0^0 sea abeliana implica que sólo para elementos Λ_\pm en $g = g_{\bar{0}}$ regulares⁶ y que conmuten entre sí, las teorías HSG tienen un gap de masa. Esto significa que g_0^0 es una subálgebra de Cartan de g y que las teorías masivas HSG están asociadas con cosets $G/U(1)^{r_g}$, donde G es un grupo de Lie semisimple y compacto de rango r_g .

En cuanto a las teorías SSSG, la condición de que g_0^0 sea una subálgebra abeliana no requiere que Λ_\pm sean elementos regulares. En este caso, es conveniente introducir la noción de subespacio de Cartan.

Consideremos la descomposición $g = g_{\bar{0}} \oplus g_{\bar{1}}$ asociada con el espacio simétrico G/G_0 . Un subespacio de Cartan $s \subseteq g_{\bar{1}}$ es un subespacio maximal abeliano de $g_{\bar{1}}$, cuyos elementos son además semisimples [32]. Para un espacio simétrico dado, todos estos subespacios tienen la misma dimensión, la cual define el rango del espacio simétrico, $rank(G/G_0)$.

Como $g_0^0 \subset g_{\bar{0}}$ es un conjunto abeliano de elementos semisimples que depende directamente de los elementos Λ_\pm , es fácil demostrar que su dimensión está acotada como

$$0 \leq rank(G) - rank(G/G_0) \leq dim(g_0^0) \leq rank(G_0). \quad (2.3.31)$$

En el caso particular de que Λ_\pm sean elementos regulares y $Ker(ad_{\Lambda_\pm})$ sea una subálgebra de Cartan de g , la dimensión de g_0^0 se iguala a la cota inferior $rank(G) - rank(G/G_0)$.

En cualquier caso, las teorías masivas SSSG estarán asociadas con cosets de la forma $G_0/U(1)^p$, donde G/G_0 es un espacio simétrico compacto y $p = dim(g_0^0)$. Es importante señalar que p puede anularse si el rango del espacio simétrico G/G_0 coincide con el rango de G . Entonces la teoría masiva SSSG resultante es simplemente una perturbación del

⁶Se dice que $\Lambda = \Lambda_+$ ó Λ_- es regular si $Ker(ad_{\Lambda}|_g)$ es una CSA del álgebra finita g . En el caso no regular, por el contrario, Λ vive en un hiperplano perpendicular a alguna raíz α , por lo que $[\Lambda, E_\alpha] = 0$ para el operador paso E_α asociado a dicha raíz y entonces $Ker(ad_{\Lambda}|_g)$ es mayor que una subálgebra de Cartan de g .

modelo de WZW correspondiente a G_0 . Es precisamente este caso el que vamos a estudiar. Este subconjunto de los modelos SSSG de tipo I son los, ya mencionados, modelos split.

Antes de pasar a estudiar concretamente las características de los modelos SSSG y, particularmente, de los modelos split, resumimos en la tabla siguiente los principales resultados que se han presentado hasta este momento.

	Acción real y positiva	Teorías puramente masivas
$h(x, t)$	$h \in G_0$ compacto $h^\dagger = h^{-1}$	Simetría gauge: $h \mapsto \alpha h \hat{\tau}(\alpha^\dagger)$ $\hat{\tau}(e^{i\Phi}) = e^{i\tau(\Phi)}$, $\tau \in Aut(g_0^0)$ compatible con \langle , \rangle
Λ_\pm	$\Lambda_\pm = \Lambda_\pm^\dagger$ $\Lambda_\pm \in g_{\bar{k}} \Rightarrow \overline{2k} = 0$	$g_0^0 = Ker(ad_{\Lambda_\pm}) \cap g_{\bar{0}}$, abeliana
σ	$\sigma = I \Rightarrow HSG$ $\sigma^2 = I \Rightarrow SSSG$	
τ		$\tau(u) \neq h_0^\dagger u h_0 \quad \forall u \in g_0^0$ $h_0^\dagger g_0^0 h_0 = g_0^0$

Tabla 2.1: Características de las teorías de Toda no abelianas puramente masivas y con acción real y positiva, siendo h_0 la configuración de vacío.

2.4 Teorías sine–Gordon de espacios simétricos.

2.4.1 Modelos SSSG asociados a Λ_\pm regulares y no regulares.

Como hemos visto en la sección anterior, la construcción de las diferentes teorías SSSG asociadas a un determinado grupo de Lie compacto G empieza con la elección de dos elementos semisimples Λ_\pm en g , el álgebra de Lie asociada a G .

En el caso de los modelos HSG, la condición de que la teoría tuviese un gap de masa implicaba automáticamente que los elementos Λ_\pm debían ser regulares. En el caso de

los modelos SSSG esto ya no es así sino que existen las dos posibilidades: Λ_{\pm} regulares y no regulares.

Salvo las restricciones que a continuación presentamos, la elección de Λ_{\pm} es libre, de modo que estos elementos pueden ser interpretados como las constantes de acoplamiento de la teoría.

- Λ_{\pm} no regulares.

En este caso $Ker(ad_{\Lambda_{\pm}})$ en g es “mayor” que la CSA en el sentido de que contiene a la subálgebra de Cartan pero además existe alguna raíz, $\vec{\alpha}$, tal que $[\Lambda, E_{\alpha}] = 0$, de modo que contiene también generadores que no pertenecen a la CSA.

La dimensión de la subálgebra abeliana g_0^0 verifica:

$$dim(g_0^0) = p, \text{ con } 0 \leq rank(G) - rank(G/G_0) < p \leq rank(G_0), \quad (2.4.32)$$

de modo que estos modelos están asociados a cosets del tipo $G_0/U(1)^p$, y p puede tomar toda la serie de valores que indica (2.4.32).

Cada una de las teorías resultantes para los diferentes valores de p está caracterizada de nuevo por una acción del tipo (2.3.20), donde h es un campo bosónico que toma valores en G_0 , A_{\pm} son conexiones gauge que toman valores en g_0^0 , y $S_{WZW}[h, A_{\pm}]$ es la acción WZW gaugeada para el coset $G_0/G_0^0 \simeq G_0/U(1)^p$, dada por la ecuación (2.3.21).

- Λ_{\pm} regulares.

En este caso $Ker(ad_{\Lambda_{\pm}})$ en g es una CSA que contiene a Λ_{\pm} y la dimensión de la subálgebra abeliana g_0^0 es:

$$dim(g_0^0) = rank(G) - rank(G/G_0) = p, \text{ con } 0 \leq p \leq rank(G_0^0). \quad (2.4.33)$$

Es interesante destacar que si elegimos Λ_{\pm} regulares los modelos SSSG resultantes pueden ser vistos como una reducción de los modelos HSG asociados a los mismos elementos regulares Λ_{\pm} .

Las ecuaciones de movimiento y acción de los modelos SSSG anteriores son totalmente análogas a las de los HSG asociados a los mismos Λ_{\pm} , sin más que imponer que el campo $h(x, t)$ viva ahora en G_0 en lugar de G . En particular, esta relación hace posible, a nivel clásico, obtener las densidades conservadas asociadas a estos modelos SSSG como una reducción de las densidades correspondientes a los modelos HSG con los que están relacionados.

Dentro de los modelos SSSG asociados con Λ_{\pm} regulares podemos distinguir dos casos:

- $dim(g_0^0) = 0$: **Modelos Split.**

En este caso la CSA está enteramente contenida en el subconjunto g_1 de g . Al ser nula la dimensión del grupo gauge, las teorías resultantes son puramente

masivas sin necesidad de llevar a cabo ninguna transformación gauge. De hecho son simplemente perturbaciones del modelo de WZW correspondiente al grupo de Lie G_0 . Estos modelos son los modelos split y en ellos vamos a concentrarnos en lo sucesivo.

Los espacios simétricos que dan lugar a modelos split son los de rango maximal y se presentan en la tabla siguiente:

	G/G_0	rango(G/G_0)	dimensión(G/G_0)
A I	$SU(n)/SO(n)$	$n - 1$	$\frac{1}{2}(n - 1)(n + 2)$
BD I	$SO(2n)/SO(n) \times SO(n)$	n	n^2
BD I	$SO(2n + 1)/SO(n) \times SO(n + 1)$	n	$n(n + 1)$
C I	$Sp(n)/U(n)$	n	$n(n + 1)$
E I	$E_6/Sp(4)$	6	42
E V	$E_7/SU(8)$	7	70
E VIII	$E_8/SO(16)$	8	128
F I	$F_4/Sp(3) \times SU(2)$	4	28
G	$G_2/SU(2) \times SU(2)$	2	8

Tabla 2.2: *Espacios simétricos que dan lugar a Modelos Split.*

Como podemos ver existe un espacio simétrico de rango maximal por cada álgebra de Lie compleja simple.

Para evitar confusiones es importante señalar que la notación AI , BDI ... que aparece en la tabla anterior para los diferentes espacios simétricos es la utilizada en [32] y no está relacionada con la distinción entre espacios simétricos de tipo I y II de la que hemos hablado anteriormente. Como ya hemos indicado anteriormente, dado que G es simple y compacto, todos los modelos que estamos estudiando son de tipo I.

– $dim(g_0^0) = p \neq 0$:

En este caso la CSA ya no está enteramente contenida en g_1 sinó que tiene también parte en la subálgebra invariante g_0 . Las teorías resultantes son cosets del tipo G_0/G_0^0 con $G_0^0 \simeq U(1)^p$.

La acción asociada a estos modelos SSSG tiene la forma (2.3.20), donde h es un campo bosónico que toma valores en G_0 , A_{\pm} son conexiones gauge que toman valores en g_0^0 , y $S_{WZW}[h, A_{\pm}]$ es la acción WZW gaugeada para el coset $G_0/G_0^0 \simeq G_0/U(1)^p$, dada por la ecuación (2.3.21).

Salvo para los modelos split, para los cuales la dimensión del grupo de simetría gauge es nula, la acción (2.3.20) es invariante bajo las transformaciones gauge:

$$h(x, t) \rightarrow e^{\alpha} h e^{-\tau(\alpha)}, \quad A_{\pm} \rightarrow A_{\pm} - \partial_{\pm} \alpha, \quad (2.4.34)$$

donde, $\alpha = \alpha(x, t)$ toma valores en $u(1)^p$ y τ es un automorfismo arbitrario de g_0^0 que preserva la restricción a este álgebra de la forma bilineal. Como g_0^0 es un álgebra abeliana, τ puede ser cualquier elemento del grupo ortogonal $O(p)$.

Ejemplo: $g = su(4)$, $g_0 = so(4)$.

Como ejemplo de todo lo explicado anteriormente y con objeto de ver en un caso concreto la aparición de diferentes tipos de modelos para g y g_0 fijos, en función de la elección de los elementos Λ_{\pm} , consideremos uno de los espacios simétricos incluidos en la tabla anterior: $G/G_0 = SU(4)/SO(4)$. En este caso $rank(SU(4)) = rank(SU(4)/SO(4)) = 3$.

Un elemento de $SO(4)$, en la representación fundamental, tiene la forma general:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

siendo a, b, c, d, e y f reales.

Por otra parte, el elemento Λ que representa a Λ_+ ó a Λ_- puede representarse mediante una matriz diagonal, antihermítica y de traza nula, es decir:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} i\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\rho \end{pmatrix}, \quad \text{con } \alpha + \beta + \gamma + \rho = 0.$$

El conmutador de un elemento general de $SO(4)$ y Λ da como resultado:

$$H = [M, \Lambda] = \begin{pmatrix} 0 & ia(\alpha - \beta) & ib(\alpha - \gamma) & ic(\alpha - \rho) \\ ia(\alpha - \beta) & 0 & id(\beta - \gamma) & ie(\beta - \rho) \\ ib(\alpha - \gamma) & id(\beta - \gamma) & 0 & if(\gamma - \rho) \\ ic(\alpha - \rho) & ie(\beta - \rho) & if(\gamma - \rho) & 0 \end{pmatrix}.$$

Si queremos saber cuál es la dimensión de g_0^0 debemos resolver la ecuación $H = 0$. Tenemos varias posibilidades según las posibles formas de Λ_{\pm} que sean compatibles con las condiciones vistas en las secciones anteriores:

- Si las componentes de la matriz Λ son todas ellas diferentes entre sí, la matriz H se hace nula sólo si lo es la matriz M . Pero si todas las componentes de M son nulas, $dim(g_0^0) = p = 0$. En este caso la CSA está contenida en g_1 y Λ es regular, es decir, tenemos el modelo split asociado al espacio simétrico $SU(4)/SO(4)$, el cual tiene tres constantes de acoplamiento α , β y γ .
- Si $\alpha = \beta$, la condición de traza nula implica que $\gamma = -2\alpha - \rho$ y H es nula sólo si tomamos $b = c = d = e = f = 0$ en la matriz M .

En este caso:

$$\Lambda = i \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha - \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos entonces $g_0^0 \simeq so(2) \simeq u(1)$ y $dim(g_0^0) = 1$.

Por lo tanto Λ es no regular y tendríamos una teoría asociada a un coset $SO(4)/U(1)$ con 2 constantes de acoplamiento α y ρ .

- Si $\alpha = \beta$ y $\gamma = \rho$, la condición de traza nula implica que $\alpha = -\gamma$ y H tiene todas sus componentes nulas sólo si $d = b = c = e = 0$.

En este caso:

$$\Lambda = i\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & -f & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos entonces $g_0^0 \simeq so(2) \oplus so(2) \simeq u(1)^2$ y $dim(g_0^0) = 2$.

Por lo tanto Λ es no regular y tendríamos una teoría asociada a un coset $SO(4)/U(1)^2$ con una constante de acoplamiento α .

- Si $\beta = \gamma = \rho$, la condición de traza nula implica que $\alpha = -3\beta$. En este caso, el único modo de hacer nulas todas las componentes de H es tomar en M , $a = b = c = 0$. De este modo:

$$\Lambda = i\beta \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e \\ 0 & -d & 0 & f \\ 0 & -e & -f & 0 \end{pmatrix},$$

tenemos entonces $g_0^0 = so(3)$. Sin embargo $so(3)$ no es un álgebra abeliana, condición que habíamos indicado como imprescindible para que la teoría correspondiente tuviese espectro puramente masivo. Por lo tanto, podemos concluir que no es posible elegir Λ de la forma anterior.

En resumen, a partir de un mismo espacio simétrico $SU(4)/SO(4)$ podemos construir 3 teorías no equivalentes, que corresponden a:

(1) Λ_{\pm} regulares y $dim(g_0^0) = 0 \Rightarrow$ modelo split asociado al espacio simétrico $SU(4)/SO(4)$.

(2) Λ_{\pm} no regulares y $0 < dim(g_0^0) \leq rank(G_0) = 2 \Rightarrow$ modelos SSSG de tipo I asociados a los cosets $SO(4)/U(1)^2$ y $SO(4)/U(1)$.

2.4.2 Espectro de partículas fundamentales de los modelos split.

Asumiendo que las condiciones previas se cumplen, esperamos que todas las fluctuaciones de los campos en torno al vacío correspondan a excitaciones masivas en la teoría cuántica.

Si tomamos $h = h_0 \exp(\Phi)$, con $\Phi \in \mathfrak{g}_0$ y $\Phi^\dagger = -\Phi$, las condiciones linealizadas (2.3.15) y las ecuaciones de movimiento (2.1.4) y (2.1.5) son

$$P(\Phi) = 0 \quad \text{y} \quad \partial_\mu \partial^\mu \Phi = -4m^2 [\Lambda_+, [h_0^\dagger \Lambda_- h_0, \Phi]], \quad (2.4.35)$$

las cuales demuestran que las partículas fundamentales están asociadas con autovalores no nulos de $[\Lambda_+, [h_0^\dagger \Lambda_- h_0, \bullet]]$ en \mathfrak{g}_0 . Veamos cuáles son las masas de las partículas fundamentales correspondientes a los modelos split.

Consideremos una base de Cartan–Weyl para el álgebra de Lie compleja $\bar{\mathfrak{g}}$, consistente en una subálgebra de Cartan \mathfrak{h} y operadores paso E_{α_j} , donde $\vec{\alpha}$ es una raíz de $\bar{\mathfrak{g}}$. Esta subálgebra de Cartan contendrá tanto a Λ_+ como a $\tilde{\Lambda}_- = h_0^\dagger \Lambda_- h_0$ puesto que Λ_\pm son elementos regulares que conmutan entre sí y puede asegurarse que $\tilde{\Lambda}_-$ vive en la misma CSA que Λ_- . Además Λ_+ y $\tilde{\Lambda}_-$ deben satisfacer (2.3.27), y la proyección en \mathfrak{g}_0 de la CSA \mathfrak{h} en la que toman valores debe ser justamente $\mathfrak{g}_0^0 = \{0\}$.

Nuestro objetivo es encontrar la forma que tienen los campos Φ que hacen que $[\Lambda_+, [h_0^\dagger \Lambda_- h_0, \Phi]]$ sea diagonal, puesto que los autovalores no nulos de esta matriz de masas nos darán las masas de las partículas fundamentales de la teoría.

Es fácil comprobar que la diagonalización tiene lugar cuando el campo tiene la forma $\Phi = \phi t^\alpha$, siendo ϕ real, de modo que Φ es un campo antihermítico que toma valores en la subálgebra $u(1)$ de $\bar{\mathfrak{g}}$ generada por t^α . Con esta elección para el campo y si tomamos $\Lambda_\pm = i\lambda_\pm^A t^A$, las masas de las partículas fundamentales de estas teorías están dadas por⁷

$$m_\alpha^2 = 4m^2 (\vec{\alpha} \cdot \Lambda_+) (\vec{\alpha} \cdot \tilde{\Lambda}_-), \quad (2.4.36)$$

y tienen que ser positivas para que el potencial tenga su mínimo absoluto en $h = h_0$. En el caso de los modelos split Λ_+ y $\tilde{\Lambda}_-$ son elementos contenidos en la misma CSA y en la misma cámara de Weyl. En particular, siempre es posible elegir una base de raíces simples de $\bar{\mathfrak{g}}$, $\{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_r\}$, tal que se verifiquen las condiciones $\vec{\alpha}_i \cdot \Lambda_+ \geq 0$ y $\vec{\alpha}_i \cdot \tilde{\Lambda}_- \geq 0$, es decir, tal que Λ_+ y $\tilde{\Lambda}_-$ estén contenidas en la cámara fundamental de Weyl de \mathfrak{h} . Por lo tanto, $\vec{\alpha} \cdot \Lambda_+$ y $\vec{\alpha} \cdot \tilde{\Lambda}_-$ no pueden anularse para ninguna raíz $\vec{\alpha}$ siendo entonces siempre positivos, puesto que el campo $\Phi = \phi t^\alpha$ es un campo que vive en la subálgebra $\bar{\mathfrak{g}}_0$, cuyos generadores son los elementos $\{t^\alpha\}$.

En resumen, para los modelos split, Λ_\pm son ambos elementos regulares contenidos en la misma CSA. La condición (2.3.27) significa que los extremos del potencial son campos h_0 que mantienen a $\tilde{\Lambda}_-$ en la misma CSA que Λ_\pm . Pero, si h_0 es un mínimo del potencial entonces Λ_+ y $\tilde{\Lambda}_-$ están además en la misma cámara de Weyl y el espectro de partículas fundamentales es tal que, asociada con cada raíz positiva $\vec{\alpha}$ de $\bar{\mathfrak{g}}$, existe una partícula fundamental descrita por un campo real cuya masa viene dada por (2.4.36).

Aparte del espectro de partículas fundamentales que acabamos de describir, es fácil comprobar la existencia de soluciones solitónicas tipo sine–Gordon, como veremos en la

⁷Se verifica que:

$$[\Lambda_+, [\tilde{\Lambda}_-, t^\alpha]] = -\lambda_+^A \tilde{\lambda}_-^B [t^A, [t^B, t^\alpha]] = (\vec{\alpha} \cdot \lambda_+) (\vec{\alpha} \cdot \tilde{\lambda}_-) t^\alpha,$$

donde $H^A = -it^A, H^B = -it^B$ son elementos de la CSA y hemos utilizado la relación de conmutación $[H^A, E_\alpha] = \alpha^A E_\alpha$.

sección (2.4.4). Al igual que las partículas fundamentales, estos solitones están asociadas con las raíces de \bar{g} .

No existe razón alguna para pensar que estas sean las únicas soluciones de tipo solitónico asociadas con los modelos split, sino que podrían existir otros tipos de solitones diferentes, sin embargo, éstas pueden ser obtenidos muy sencillamente y, por cada raíz de \bar{g} , al igual que en el modelo de sine–Gordon, tendremos un solitón, un antisolitón y los correspondientes “breathers”.

Antes de pasar a estudiar en detalle este tipo de soluciones es conveniente especificar la normalización de la forma bilineal en \bar{g} que se ha utilizado. Introduciremos también ciertas definiciones que nos ayudarán a entender mejor resultados posteriores.

2.4.3 Realización de la base t^a de g para los modelos split.

Es conveniente señalar en este punto algunos aspectos importantes acerca de la realización de los elementos t^a de la base del álgebra g que vamos a utilizar.

En primer lugar consideraremos una base de generadores antihermíticos, normalizada de modo que:

$$\langle t^a, t^b \rangle = -\delta^{ab}, \quad (2.4.37)$$

donde \langle , \rangle es una forma bilineal en \bar{g} , es decir, una aplicación de la forma:

$$\langle , \rangle : \bar{g} \times \bar{g} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (2.4.38)$$

tal que para cualesquiera a, b en \mathbb{C} y t^a, t^b y t^c en \bar{g} se verifica que:

$$\langle at^a + bt^b, t^c \rangle = a\langle t^a, t^c \rangle + b\langle t^b, t^c \rangle. \quad (2.4.39)$$

Esta forma bilineal tiene además las siguientes propiedades:

- Simétrica.

$$\langle t^a, t^c \rangle = \langle t^c, t^a \rangle \quad \forall t^a, t^c. \quad (2.4.40)$$

- Invariante.

$$\langle [t^a, t^b], t^c \rangle + \langle t^b, [t^a, t^c] \rangle = 0 \quad \forall t^a, t^b, t^c. \quad (2.4.41)$$

- No degenerada.

La matriz cuyas componentes son

$$B_{ac} = \langle t^a, t^c \rangle, \quad (2.4.42)$$

es no singular.

En nuestro caso, distinguiremos entre los generadores de la CSA, que denotaremos por t^A, t^B, \dots con $A, B, \dots = 1, \dots, rank(G)$, y los otros generadores que serán denotados como t^i, t^j, \dots .

La realización de esta base a partir de una base de Chevalley para la complexificación de g se construye siguiendo los pasos que se explican en los siguientes apartados:

- En primer lugar consideremos una base de Cartan–Weyl de \bar{g} constituida por los elementos H^A , $A = 1, \dots, \text{rank}(g)$, que generan la subálgebra de Cartan (CSA) de \bar{g} , y los operadores paso E_α , que satisfacen las reglas de conmutación generales:

$$[H^A, E_\alpha] = \langle H^A, H^\alpha \rangle E_\alpha, \quad [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \langle E_\alpha, E_{-\alpha} \rangle H^\alpha, \quad (2.4.43)$$

donde H^α es un elemento de la CSA que depende tanto de la raíz considerada como de la forma bilineal. Esta dependencia es tal que las relaciones de conmutación (2.4.43) son invariantes bajo un cambio en la normalización de la forma bilineal pues éste se compensa con la transformación de los elementos H^α .

Supongamos que H es un elemento arbitrario de la CSA que puede expresarse como combinación lineal de los elementos H^A de la base del siguiente modo

$$H = \sum_{A=1}^{\text{rank}(g)} \mu^A \cdot H^A = \vec{\mu} \cdot \vec{H}, \quad (2.4.44)$$

donde, en la última igualdad, hemos utilizado notación vectorial. Del mismo modo, utilizando esta notación vectorial, es posible escribir $H^\alpha = \vec{\alpha} \cdot \vec{H}$, siendo $\vec{\alpha}$ una raíz de \bar{g} .

Los elementos H^α de la CSA inducen, mediante la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle$ otra forma bilineal simétrica y no degenerada que se corresponde con el siguiente producto escalar:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \langle H^\alpha, H^\beta \rangle, \quad (2.4.45)$$

en función de la cual los elementos de la matriz de Cartan A_{ij} que caracteriza a toda álgebra de Lie tienen la forma:

$$A_{ij} = 2 \frac{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_j}{\vec{\alpha}_i \cdot \vec{\alpha}_i}, \quad (2.4.46)$$

siendo $\vec{\alpha}_i$ con $i = 1, \dots, \text{rank}(g)$ las raíces simples del álgebra.

Introducidas las anteriores definiciones (ver [34, 36]), podemos pasar ya a discutir la elección de la forma bilineal y de los generadores que será más conveniente para nuestro caso.

- Un modo de fijar la normalización de la forma bilineal consiste en fijar el valor del cuadrado de las raíces largas del álgebra de Lie.

En nuestro caso estamos interesados en utilizar una forma bilineal no degenerada tal que las raíces largas de \bar{g}_0 tengan cuadrado 2 ($\Psi_{g_0}^2 = 2$).

El interés de esta elección particular de la normalización es debido a la condición de cuantización (A.0.11) que presentamos en el apéndice A. Es claro que precisamente cuando $\Psi_{g_0}^2 = 2$, dicha condición de cuantización adquiere su forma más sencilla, estando $1/\beta^2$ restringido a tomar valores enteros.

La elección particular de la normalización utilizada influye también en el valor del casimir de \bar{g} en la representación adjunta, puesto que, en esta representación

$$C_g = \Psi_g^2 h_g^\vee = \langle H^{\Psi_g}, H^{\Psi_g} \rangle h_g^\vee, \quad (2.4.47)$$

siendo h_g^\vee el número de coxeter dual de \bar{g} .

Sin embargo, la elección de una u otra normalización para la forma bilineal no afecta a las relaciones de conmutación (2.4.43), como ya hemos dicho, ni a los generadores E_α , cuya normalización puede ser fijada independientemente de la forma bilineal, como tampoco influirá en la forma de los generadores de la base compacta t^a que presentaremos más abajo.

Tampoco el cociente $\Psi_g^2/\Psi_{g_0}^2$, que aparecerá con frecuencia en resultados posteriores, se ve afectado por la elección de la forma bilineal puesto que los cuadrados de ambas raíces largas, la de \bar{g} y la de \bar{g}_0 se calculan utilizando una misma forma bilineal.

- Hechos estos comentarios, supongamos que \langle , \rangle es la forma bilineal normalizada de modo que la longitud al cuadrado de las raíces largas de g es Ψ_g^2 y $(|)$ la forma bilineal normalizada de modo que la longitud al cuadrado de las raíces largas de g_0 es 2. Dado que \bar{g} es semisimple⁸, existirá entre ambas una relación de proporcionalidad de la forma:

$$(|) = N \langle , \rangle, \quad (2.4.48)$$

donde N es una constante para cada espacio simétrico G/G_0 .

Puesto que $\langle H^\alpha, H^\alpha \rangle$ es invariante bajo cambios de normalización en la forma bilineal, la relación (2.4.48) implica que los nuevos elementos \tilde{H}^α de la CSA, asociados a la forma bilineal $(|)$ se relacionan con los elementos H^α correspondientes a la forma bilineal \langle , \rangle del siguiente modo,

$$\tilde{H}^\alpha = \frac{H^\alpha}{N}. \quad (2.4.49)$$

Es fácil obtener el valor de N sin más que utilizar los resultados anteriores:

$$N \langle H^{\Psi_g}, H^{\Psi_g} \rangle = (H^{\Psi_g} | H^{\Psi_g}) = N^2 (\tilde{H}^{\Psi_g} | \tilde{H}^{\Psi_g}) \Rightarrow \Psi_g^2 = N \tilde{\Psi}_g^2, \quad (2.4.50)$$

es decir,

$$N = \frac{\Psi_g^2}{\tilde{\Psi}_g^2}, \quad (2.4.51)$$

o bien, si consideramos un generador $H^{\Psi_{g_0}}$ en lugar de H^{Ψ_g} en (2.4.50),

$$N = \frac{\Psi_{g_0}^2}{2}. \quad (2.4.52)$$

⁸Cuando un álgebra de Lie es semisimple todas las formas bilineales no degeneradas son proporcionales entre sí.

- Los generadores de la base compacta serán los siguientes:

$$t^A = iH^A, \quad t^\alpha = N_1(E_\alpha - E_{-\alpha}), \quad t^{\bar{\alpha}} = iN_2(E_\alpha + E_{-\alpha}). \quad (2.4.53)$$

Las constantes N_1 , N_2 quedan fijadas si imponemos que la forma bilineal (|) satisfaga también la condición (2.4.37), y sus valores son:

$$N_1 = N_2 = \sqrt{\frac{1}{2(E_\alpha | E_{-\alpha})}}. \quad (2.4.54)$$

Como vemos, la normalización de los operadores paso E_α queda libre y es independiente de la normalización de la forma bilineal. Tanto t^α como $t^{\bar{\alpha}}$, son invariantes bajo cambios de normalización de los operadores paso, como también lo eran la relaciones generales de conmutación (2.4.43).

- Podemos ahora particularizar para algunos de los modelos split, aquellos asociados a álgebras de Lie g clásicas, y obtener los valores de $N = \Psi_g^2 / \tilde{\Psi}_g^2$:

$$(a) \ G/G_0 = SU(n)/SO(n) \Rightarrow N = \frac{1}{4n}.$$

$$(b) \ G/G_0 = SO(2n)/SO(n) \times SO(n) \Rightarrow N = \frac{1}{4(n-1)}.$$

$$(c) \ G/G_0 = SO(2n+1)/SO(n) \times SO(n+1) \Rightarrow N = \frac{1}{2(2n-1)}.$$

$$(d) \ G/G_0 = Sp(n)/U(n) \Rightarrow N = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Estos resultados se han obtenido utilizando las realizaciones matriciales de los generadores de la base compacta propuestas en el apéndice E del segundo tomo de [36]. Como vemos, en los casos (b) y (c), las álgebras de Lie g_0 son semisimples, en particular, son suma directa de dos subálgebras simples. Por ello es natural considerar la posibilidad de que no sea posible normalizar los cuadrados de las raíces largas de ambas componentes simples simultáneamente (con la misma forma bilineal) a 2. Afortunadamente, es fácil comprobar que este problema no se presenta en ninguno de estos dos casos.

- Para finalizar, nos parece de interés presentar una serie de relaciones generales que pueden obtenerse partiendo simplemente de la igualdad

$$f^{abc} f^{dbc} = C_g \delta^{ad} = \Psi_g^2 h_g^\vee \delta^{ad}, \quad (2.4.55)$$

donde C_g es el casimir asociado a la representación adjunta de g .

Si tomamos $a = \alpha$ y $d = \beta$ obtenemos

$$\Psi_g^2 h_g^\vee \delta^{\alpha\beta} = 2f^{\bar{\alpha}\alpha A} f^{\bar{\alpha}\beta A} + f^{\alpha\delta\gamma} f^{\beta\delta\gamma} + f^{\alpha\bar{\delta}\bar{\gamma}} f^{\beta\bar{\delta}\bar{\gamma}}. \quad (2.4.56)$$

Puede demostrarse que, en el caso $\alpha = \beta$, se verifica la igualdad

$$f^{\alpha\delta\gamma} f^{\alpha\delta\gamma} = f^{\alpha\bar{\delta}\bar{\gamma}} f^{\alpha\bar{\delta}\bar{\gamma}}, \quad (2.4.57)$$

y, en este caso, (2.4.56) se convierte en

$$\Psi_g^2 h_g^\vee \dim(g_0) = 2 \sum_{\alpha>0} \alpha^A \alpha^A + 2 f^{\alpha\delta\gamma} f^{\alpha\delta\gamma}. \quad (2.4.58)$$

Pero, si G_0 es simple y, como ocurre en el caso de los modelos split, esta generado por los generadores $\{t^\alpha\}$, se cumplirá en la representación adjunta,

$$f^{\alpha\beta\delta} f^{\alpha\beta\delta} = C_{g_0} \delta^{\alpha\alpha} = \Psi_{g_0}^2 h_{g_0}^\vee \delta^{\alpha\alpha}, \quad (2.4.59)$$

y esta igualdad nos permite escribir (2.4.58) finalmente como

$$\Psi_g^2 h_g^\vee \dim(g_0) = 2 \sum_{\alpha>0} \alpha^A \alpha^A + 2 \Psi_{g_0}^2 h_{g_0}^\vee \dim(g_0). \quad (2.4.60)$$

Por otra parte, si en (2.4.55) tomamos ahora $a = A$ y $d = B$, la relación que obtenemos es

$$\Psi_g^2 h_g^\vee \delta^{AB} = 2 \sum_{\alpha>0} \alpha^A \alpha^B \Rightarrow \sum_{\alpha>0} \alpha^A \alpha^B = \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee}{2} \delta^{AB}, \quad (2.4.61)$$

que, sustituyendo en (2.4.60) nos da la siguiente igualdad

$$\left(\frac{\Psi_g}{\Psi_{g_0}} \right)^2 = \frac{2 h_{g_0}^\vee \dim(g_0)}{h_g^\vee [\dim(g_0) - \text{rank}(g)]}, \quad (2.4.62)$$

que podemos utilizar, por ejemplo, para obtener la relación entre las longitudes de las raíces largas de las álgebras g y g_0 para un ejemplo concreto.

Si tomamos $g = su(n)$, $h_g^\vee = n$, $g_0 = so(n)$ y $h_{g_0}^\vee = n - 2$ obtenemos precisamente

$$\left(\frac{\Psi_{su(n)}}{\Psi_{so(n)}} \right)^2 = 2, \quad (2.4.63)$$

resultado que aparecerá de nuevo en el capítulo 3, obtenido por un procedimiento totalmente diferente, lo cual pone de manifiesto su independencia con respecto a la normalización de la forma bilineal como ya habíamos señalado.

2.4.4 Soluciones solitónicas de los modelos split.

Como es habitual cuando se estudian modelos integrables, estamos interesados en encontrar soluciones de tipo solitónico. En esta sección, como ya hemos adelantado, vamos a construir algunas soluciones de este tipo, a partir de los subgrupos uniparamétricos de G_0 generados por los elementos t^α , subgrupos que son evidentemente isomorfos a $U(1)$.

La construcción de estos solitones es especialmente sencilla, aunque no podemos asegurar que constituyan el conjunto completo de solitones de los modelos split, y guarda

una estrecha relación con la construcción de los solitones del modelo de sine–Gordon. De hecho, los solitones de los modelos split que hemos construido resultan del “embedding” de solitones tipo sine–Gordon en G_0 .

De acuerdo con lo anterior es conveniente hacer ahora un breve repaso de las características más importantes del modelo de sine–Gordon ordinario.

La densidad lagrangiana invariante Lorentz que caracteriza al modelo de sine–Gordon ordinario (ver por ejemplo [35]) es de la forma:

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi), \quad (2.4.64)$$

con

$$V(\varphi) = \frac{m^4}{\lambda} (\cos(\sqrt{\lambda}/m) \varphi - 1), \quad (2.4.65)$$

siendo m una constante con dimensiones de masa y λ una constante de acoplamiento.

La ecuación de movimiento para el campo $\varphi(x, t)$ es la siguiente:

$$\partial^\mu \partial_\mu \varphi + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \text{sen}(\sqrt{\lambda}/m) \varphi = 0. \quad (2.4.66)$$

En el caso estático, la anterior ecuación presenta dos tipos de soluciones:

$$\varphi_{s, \bar{s}}(x) = \pm \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1} [e^{m(x-x_0)}], \quad (2.4.67)$$

donde x_0 es una constante de integración. La solución de signo positivo se denomina solitón (s) y la de signo negativo antisolitón (\bar{s}). Debido a la invariancia Lorentz anteriormente mencionada, dada una solución estática de la ecuación de movimiento $\varphi(x)$, su transformación Lorentz nos proporciona soluciones no estáticas. Dado que $\varphi(x)$ es un campo escalar dichas soluciones no estáticas se obtienen transformando Lorentz la coordenada x , tal y como se indica a continuación:

$$x \rightarrow (x - ut)/\sqrt{1 - u^2}, \quad (2.4.68)$$

donde u es la velocidad del nuevo sistema de referencia con respecto al sistema de referencia en el cual solitón y antisolitón están en reposo.

Existen también otro tipo de soluciones llamadas “breathers” que pueden interpretarse como estados ligados de un solitón y un antisolitón. La forma general de estas soluciones es:

$$\varphi_v(x, t) = \frac{m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1} \left(\frac{\text{sen}\left(\frac{mvt}{\sqrt{1+v^2}}\right)}{v \cosh\left(\frac{mx}{\sqrt{1+v^2}}\right)} \right) \quad (2.4.69)$$

para una configuración en reposo, mientras que las soluciones móviles se obtendrían haciendo las correspondientes transformaciones (“boost”) Lorentz de las coordenadas (x, t) . v es un parámetro que puede tomar cualquier valor clásicamente pero que, al cuantizar semiclásicamente la teoría, queda restringido a un conjunto de valores discretos y, por lo tanto, el número de solitones de tipo “breather” también es discreto en este caso.

Las soluciones (2.4.69) son periódicas con período:

$$\tau = \frac{2\pi\sqrt{1+v^2}}{mv}, \quad (2.4.70)$$

que se interpreta como el período de oscilación relativo del solitón y el antisolitón.

Recordemos que un solitón es una solución de las ecuaciones de movimiento que tiene energía finita y densidad de energía localizada. Estas condiciones implican que los campos que representen soluciones de este tipo deben tomar asintóticamente valores que se correspondan con mínimos del potencial. En el caso del modelo de sine–Gordon, el conjunto de mínimos del potencial es el siguiente conjunto discreto:

$$\varphi_0 = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.71)$$

Todas las configuraciones de energía finita, tanto estáticas como dependientes del tiempo pueden ser pues clasificadas en sectores topológicos, caracterizados por una carga topológica Q que toma valores enteros y se define como:

$$Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} [\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)] = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi m} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial\varphi}{\partial x} \in \mathbb{Z}. \quad (2.4.72)$$

Por otra parte, el comportamiento asintótico de los solitones, antisolitones y “breathers” de sine–Gordon es de la forma:

$$\varphi_{s,\bar{s}}(+\infty) - \varphi_{s,\bar{s}}(-\infty) = \pm \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}, \quad \text{y} \quad \varphi_v(+\infty) - \varphi_v(-\infty) = 0, \quad (2.4.73)$$

por lo tanto, de acuerdo con la definición (2.4.72) el solitón y antisolitón de sine–Gordon tienen respectivamente cargas topológicas $+1$ y -1 mientras que los “breathers” tienen carga topológica nula.

Consideremos ahora los modelos split. Recordemos que la acción de las teorías de Toda no abelianas tiene la forma general:

$$S[h] = \frac{1}{\beta^2} \left\{ S_{WZW}[h] - \frac{m^2}{\pi} \int d^2x V(h) \right\}. \quad (2.4.74)$$

La acción del modelo de WZW en G_0 , es la que presentamos en el apéndice A,

$$S_{WZW} = \frac{\mathcal{F}}{8\pi} + \Gamma[B], \quad (2.4.75)$$

donde $\Gamma[B]$ es el término de WZ (A.0.2) que, en este caso, no tiene relevancia puesto que, al ser el subgrupo embebido en G_0 isomorfo a $U(1)$, se anula y

$$\mathcal{F} = - \int d^2x (h^{-1} \partial_\mu h | h^{-1} \partial^\mu h). \quad (2.4.76)$$

Sea un campo $h = e^\Phi$, con $\Phi = \phi t^\alpha$, que toma valores en el subgrupo uniparamétrico de G_0 generado por el elemento t^α y sustituyamos esta expresión para el campo h en (2.4.76). El resultado es el siguiente:

$$S_{WZW}[\phi] = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi, \quad (2.4.77)$$

y, en cuanto al potencial $V(h)$, que tiene la forma general ⁹

$$V(h) = -(\Lambda_+ | h^\dagger \Lambda_- h) + (\Lambda_+ | \Lambda_-). \quad (2.4.78)$$

puede comprobarse fácilmente que si $\Lambda_\pm = i\lambda_\pm^A t^A$ y $h = e^{\phi t^\alpha}$,

$$V(\phi) = \frac{m_\alpha^2}{4\pi\vec{\alpha}^2} (\cos(\sqrt{\vec{\alpha}^2}\phi) - 1), \quad (2.4.79)$$

siendo m_α la masa de la partícula fundamental asociada a la raíz $\vec{\alpha}$ que fue obtenida en la sección (2.4.2).

En resumen, la densidad lagrangiana correspondiente al campo $h = e^{\phi t^\alpha}$ es:

$$\mathcal{L}(x, t) = \frac{1}{4\pi\beta^2} \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{m_\alpha^2}{\vec{\alpha}^2} (\cos(\sqrt{\vec{\alpha}^2}\phi) - 1) \right), \quad (2.4.80)$$

que, haciendo los cambios de variables

$$\bar{\phi} = \sqrt{\vec{\alpha}^2}\phi, \quad \text{y} \quad \bar{x}_\mu = m_\alpha x_\mu, \quad (2.4.81)$$

se transforma en:

$$\bar{\mathcal{L}}(\bar{x}, \bar{t}) = \frac{m_\alpha^2}{4\pi\beta^2\vec{\alpha}^2} \left(\frac{1}{2} \bar{\partial}_\mu \bar{\phi} \bar{\partial}^\mu \bar{\phi} + \cos\bar{\phi} - 1 \right). \quad (2.4.82)$$

Esta densidad lagrangiana es la del modelo de sine–Gordon restringido, que es la misma que para el modelo de sine–Gordon ordinario con la particularidad, a nivel cuántico, de que la constante de acoplamiento está cuantizada debido a que la teoría de partida es un modelo de WZW perturbado. Por lo tanto, la ecuación de movimiento correspondiente a la densidad lagrangiana (2.4.82) es, salvo constantes, idéntica a (2.4.66) y sus soluciones son también del mismo tipo que en sine–Gordon, es decir, por cada raíz $\vec{\alpha} > 0$ tenemos un espectro de solitones formado por un solitón, un antisolitón y los correspondientes “breathers”.

La energía asociada a cualquier solución $\phi(x, t)$ de la ecuación de movimiento correspondiente a la densidad lagrangiana (2.4.82) viene dada por:

$$E[\phi] = \frac{m_\alpha}{4\pi\beta^2\vec{\alpha}^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\bar{x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{t}} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\bar{\phi}}{\partial\bar{x}} \right)^2 + (1 - \cos\bar{\phi}) \right\}, \quad (2.4.83)$$

y, en particular, para el solitón y el antisolitón estáticos (2.4.67), coincide con su masa:

⁹En la expresión del potencial se suma el término $(\Lambda_+ | \Lambda_-)$ con la finalidad de ajustar la energía del estado fundamental $E = 0$.

$$M_{s,\bar{s}}^\alpha = \frac{2}{\bar{\alpha}^2} \frac{1}{\pi\beta^2} m_\alpha. \quad (2.4.84)$$

Teniendo en cuenta la expresión de las masas m_α dada por (2.4.36), es fácil comprobar que:

$$m_{\alpha+\beta} \geq m_\alpha + m_\beta \Rightarrow M_s^{\alpha+\beta} \geq M_s^\alpha + M_s^\beta. \quad (2.4.85)$$

Esta desigualdad significa que, el solitón (o antisolitón) de masa $M_s^{\alpha+\beta}$ es, en general, inestable.

Por otra parte, es conocido que las masas de los estados ligados correspondientes a los “breathers” [12] vienen dadas por:

$$M_n(\alpha) = 2M_s^\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\bar{\alpha}^2}{4k} n\right) \leq 2M_s^\alpha, \quad (2.4.86)$$

donde hemos utilizado la condición de cuantización $1/\beta^2 = k$ y n es un entero positivo tal que $n < 2k/\bar{\alpha}^2$. Este valor límite es el valor para el cual la masa del “breather” se hace igual a $2M_s^\alpha$ y por ello está prohibido, pues en ese caso los “breathers” podrían desintegrarse en pares solitón–antisolitón. Así pues los “breathers” se interpretan como estados ligados solitón–antisolitón y, por cada raíz $\bar{\alpha}$, tendremos un conjunto de

$$\frac{2k}{\bar{\alpha}^2} - 1 \quad (2.4.87)$$

“breathers”.

Dada la proporcionalidad de la masa de los “breathers” asociados con una raíz $\bar{\alpha}$ a la masa del solitón correspondiente a esa misma raíz, también las masas de los “breathers” verifican desigualdades similares a (2.4.85) que, en particular, en el caso de álgebras de Lie \bar{g} simplemente enlazadas, son exactamente del mismo tipo. Por ello, podemos concluir que, en el caso de álgebras de Lie simplemente enlazadas, sólo los solitones, antisolitones y “breathers” correspondientes a raíces $\bar{\alpha}_i$ simples dan lugar a partículas estables.

Por otra parte, si en la expresión (2.4.86) sustituimos la masa del solitón por su valor (2.4.84) es fácil comprobar que, en el límite semiclásico ($k \rightarrow \infty$), se verifica:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} M_n(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{4k}{\pi\bar{\alpha}^2} m_\alpha \operatorname{sen}\left(\frac{\pi\bar{\alpha}^2}{4k} n\right) = nm_\alpha - \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad (2.4.88)$$

es decir, en el límite semiclásico el “breather” $n = 1$ es la partícula fundamental de la teoría mientras que los “breathers” con $n > 1$ podrían interpretarse como estados ligados de n partículas fundamentales.

Consideremos ahora el comportamiento asintótico de las soluciones $\bar{\phi}_{s,\bar{s}}(x)$:

$$\bar{\phi}_{s,\bar{s}}(+\infty) - \bar{\phi}_{s,\bar{s}}(-\infty) = \pm 2\pi. \quad (2.4.89)$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h_s(x) = I, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h_s(x) = e^{\frac{2\pi t^\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}}, \quad (2.4.90)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h_{\bar{s}}(x) = I, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} h_{\bar{s}}(x) = e^{-\frac{2\pi t^\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}}. \quad (2.4.91)$$

Estos valores asintóticos para $h_s(x)$ y $h_{\bar{s}}(x)$ son vacíos de la teoría, condición indispensable para asegurar el carácter finito de la energía y el carácter localizado (en este caso en torno a x_0) de la densidad de energía.

•Naturaleza topológica de los solitones de los modelos split.

Una vez comprobada la existencia de soluciones solitónicas, antisolitónicas y “breathers” asociadas con cada generador $\{t^\alpha\}$ del álgebra de Lie \bar{g} la siguiente cuestión a investigar es la naturaleza de estos solitones, es decir, si son o no topológicos.

Puesto que los valores asintóticos de los campos $h_{s,\bar{s}}(x)$ son siempre vacíos de la teoría, nos concentraremos primeramente en identificar el conjunto de vacíos correspondientes a los modelos split. Como ya hemos determinado en la sección (2.4.2), las configuraciones de vacío h_0 satisfacen las siguientes propiedades:

$$[\Lambda_+, h_0^\dagger \Lambda_- h_0] = 0 \quad \text{con} \quad \Lambda_+, h_0^\dagger \Lambda_- h_0 \in \text{misma cámara de Weyl.} \quad (2.4.92)$$

Suponiendo que la solución $h_0 = I$ sea un mínimo del potencial (2.4.78), las anteriores condiciones implican que:

$$h_0^\dagger \Lambda_- h_0 = \Lambda_-. \quad (2.4.93)$$

Es decir, el conjunto de vacíos es el normalizador de Λ_- en G_0 y se puede comprobar que está formado por los elementos:

$$N_{\Lambda_-} = \{I, e^{i\pi \vec{\lambda} \cdot \vec{H}} \mid \vec{\lambda} = \sum_{i=1}^{r_g} n_i \alpha_i^\vee\} \subset G, \quad (2.4.94)$$

donde $\vec{\alpha}^\vee$ son las co-raíces de G , que se definen como:

$$\vec{\alpha}^\vee = \frac{2\vec{\alpha}}{\alpha^2}, \quad (2.4.95)$$

es decir, N_{Λ_-} es la red de co-raíces de G , que habitualmente se denota por $\Lambda_R(G^\vee)$. Estos vacíos cumplen además, en cualquier representación finita de G de peso máximo, la condición,

$$e^{i2\pi \vec{\lambda} \cdot \vec{H}} = I, \quad (2.4.96)$$

la cual nos indica que el conjunto N_{Λ_-} contiene elementos redundantes y, por lo tanto, los vacíos de la teoría son realmente los siguientes:

$$M_0 = \{I, e^{i\pi \vec{\lambda} \cdot \vec{H}} \mid \vec{\lambda} = \sum_{i=1}^{r_g} n_i \alpha_i^\vee; \quad n_i = 0, 1\} \subset G, \quad (2.4.97)$$

los cuales constituyen un grupo abeliano discreto e isomorfo a $\Lambda_R(G^\vee) \bmod 2\Lambda_R(G^\vee)$. El carácter discreto de este conjunto de vacíos de la teoría es fundamental debido a lo siguiente: como los campos $h_{s,\bar{s}}$ dependen de x y de t , cuando $x \rightarrow \pm\infty$, $h_{s,\bar{s}}(\pm\infty, t)$ será, en principio, cierta función continua del tiempo pero, por otra parte, ha de ser uno de los vacíos de la teoría, los cuales forman un conjunto discreto. Este carácter discreto implica que no es posible pasar de un vacío a otro variando t de forma continua y, por lo tanto, para una configuración solitónica dada, los valores $h_{s,\bar{s}}(\pm\infty, t)$ deben ser independientes del tiempo.

Una vez construido el conjunto de vacíos M_0 de los modelos split, nos encontramos con un problema y es que los vacíos h_0 dados por (2.4.97) son campos que aparentemente viven en G y no en G_0 . Para resolverlo es necesario tener en cuenta que el conjunto de elementos:

$$\left\{ J_1 = \frac{t^\alpha}{\sqrt{\bar{\alpha}^2}}, J_2 = \frac{t^{\bar{\alpha}}}{\sqrt{\bar{\alpha}^2}}, J_3 = -\frac{H^\alpha}{\bar{\alpha}^2} \right\} \in g, \quad [J_i, J_j] = \epsilon_{ijk} J_k, \quad (2.4.98)$$

forman una subálgebra $su(2)$ de g .

Podemos decir pues que, asociado con cada raíz positiva de un álgebra de Lie, existe un “embedding” de una subálgebra $su(2)$ de la forma (2.4.98). Este “embedding” permite descomponer el álgebra g en suma directa de representaciones con respecto a $su(2)$, cada una de las cuales está caracterizada por el valor del casimir cuadrático $C_j = j(j+1)$, siendo j el spin, que puede ser entero o semientero.

De acuerdo con (2.4.98) y utilizando también (2.4.95) podemos escribir:

$$e^{-i\pi\bar{\alpha}^\vee \cdot \vec{H}} = e^{2\pi i J_3} \quad \text{y} \quad e^{\frac{2\pi t^\alpha}{\sqrt{\bar{\alpha}^2}}} = e^{2\pi i J_1}, \quad (2.4.99)$$

y puede demostrarse que, en cualquier representación irreducible de $SU(2)$, se verifica que:

$$e^{2\pi i J_3} |_{C_j} = e^{2\pi i j} I, \quad (2.4.100)$$

siendo I la identidad en dicha representación.

Por otra parte, es posible demostrar también que, para cualquier representación irreducible de $SU(2)$, siempre existe una matriz S tal que se verifica la siguiente igualdad:

$$S^{-1} e^{2\pi i J_1} |_{C_j} S = e^{2\pi i j} I, \quad (2.4.101)$$

es decir, siempre es posible encontrar una transformación S que diagonalice al elemento $e^{2\pi i J_1}$ de modo que sus autovalores sean los mismos que los de $e^{2\pi i J_3}$. Por lo tanto, combinando este resultado con (2.4.100) podemos escribir:

$$e^{i\pi\bar{\alpha}^\vee \cdot \vec{H}} |_{C_j} \equiv e^{\frac{2\pi t^\alpha}{\sqrt{\bar{\alpha}^2}}} |_{C_j} \in G, \quad (2.4.102)$$

para cualquier representación irreducible de $SU(2)$. Nótese que esta equivalencia sólo se presenta cuando se consideran vacíos de la forma:

$$e^{i\pi\vec{\lambda} \cdot \vec{H}} \quad \text{con} \quad \vec{\lambda} = \bar{\alpha}^\vee. \quad (2.4.103)$$

La identidad (2.4.102) implica que la condición (2.4.96) puede escribirse equivalentemente como:

$$e^{\frac{2\pi t^\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}} = e^{\frac{-2\pi t^\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}}. \quad (2.4.104)$$

De acuerdo con estos argumentos, las condiciones asintóticas (2.4.90) y (2.4.91) son iguales para el solitón y para el antisolitón, éstos son indistinguibles en los modelos split, a no ser que exista alguna otra característica topológica que los diferencie, cuestión que consideraremos a continuación. Antes de pasar a considerar esta posibilidad nótese que una posible forma de caracterizar a los solitones obtenidos es asignarles una “carga topológica” dada por la cantidad:

$$h_0^\dagger(-\infty, t)h_0(+\infty, t) = e^{i\pi\vec{\alpha}^\vee \cdot \vec{H}} \in M_0, \quad (2.4.105)$$

que tiene el mismo valor para solitón y antisolitón.

De acuerdo con las igualdades (2.4.90) y (2.4.91) que describen el comportamiento asintótico de un solitón y un antisolitón, éstos pueden ser interpretados como trayectorias en G_0 que conectan dos puntos fijos pertenecientes al conjunto de vacíos M_0 . La clasificación de estos solitones mediante la asignación de una carga topológica de la forma (2.4.105) es pues incompleta, dado que dicha carga depende únicamente de la posición relativa de los puntos fijos correspondientes a los valores asintóticos de los campos solitónicos, no conteniendo información alguna sobre las trayectorias que interpolan entre dichos puntos fijos. La clasificación de las soluciones solitónicas se completa con la información proporcionada por el grupo fundamental de homotopía de G_0 , $\pi_1(G_0)$, el cual clasifica precisamente el conjunto de trayectorias que conectan puntos fijos en G_0 en clases de homotopía.

Cuando $\pi_1(G_0) = \{0\}$ todas las trayectorias que conectan dos puntos fijos en G_0 son topológicamente equivalentes, es decir, pueden ser deformadas de modo continuo las unas a las otras mientras que, en caso contrario, habrá tantos tipos diferentes de trayectorias como elementos en $\pi_1(G_0)$.

En resumen, cada configuración solitónica podrá caracterizarse por un par $(k, \vec{\lambda})$ con $k \in \pi_1(G_0)$ y $\vec{\lambda} \in \Lambda_R(G^\vee)/2\Lambda_R(G^\vee)$.

Finalmente debemos señalar, en referencia a los “breathers”, que éstos corresponderán siempre a configuraciones topológicamente triviales en el sentido de que satisfacen,

$$h_B(+\infty, t) = h_B(-\infty, t), \quad (2.4.106)$$

y se corresponden con el elemento identidad del grupo $\Pi_1(G_0)$.

Como ya hemos señalado anteriormente las cargas topológicas (2.4.105) coinciden para un solitón y un antisolitón asociados a la misma raíz $\vec{\alpha}$ y, por lo tanto, la posibilidad de diferenciar entre solitones y antisolitones depende del grupo fundamental de homotopía de G_0 , el cual clasifica todas las posibles trayectorias cerradas no triviales en G_0 . Si $\Pi_1(G_0) = \{0\}$, como ocurre para algunos de los modelos split (ver tabla (2.3)), no existe ningún modo de diferenciar entre solitones y antisolitones, mientras que, si es no trivial, existe la posibilidad de que puedan ser diferenciados, aunque no es posible asegurarlo sin un estudio detallado de cada caso particular.

G_0	$SO(n)$ $SO(16)$	$SO(n) \times SO(n+1)$ $SO(n) \times SO(n)$	$U(n)$	$Sp(4)$ $SU(8)$ $Sp(3) \times SU(2)$ $SU(2) \times SU(2)$
$\pi_1(G_0)$	\mathbb{Z}_2	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$	\mathbb{Z}	0

Tabla 2.3: Grupos fundamentales de homotopía asociados a G_0 para los modelos split.

Una descripción detallada de las características y definición del grupo fundamental de homotopía y de los grupos de homotopía de orden superior puede encontrarse en [38].

La caracterización topológica de los solitones y antisolitones de los modelos split que acabamos de describir brevemente presenta un gran paralelismo con el estudio de la cuantización de la carga magnética correspondiente a soluciones de tipo monopolo en teorías con una simetría gauge no abeliana. Este problema se trata en [30].

2.5 Densidades conservadas clásicamente en modelos split.

Pasamos ahora a explicar el procedimiento por el cual hemos obtenido las densidades conservadas clásicamente para estos modelos, la construcción de Drinfeld–Sokolov, así como a dar la forma concreta que tienen estas densidades clásicas, que puede compararse con la de las obtenidas para los modelos HSG en [2] para comprobar cómo efectivamente las primeras son reducción de las segundas.

2.5.1 Densidades conservadas clásicamente.

Las ecuaciones de movimiento de las teorías que estamos estudiando admiten la siguiente expresión en forma de ecuación de curvatura nula:

$$[\partial_+ + mh\Lambda_+h^\dagger, \partial_- + m\Lambda_- - \partial_-hh^\dagger] = 0. \quad (2.5.107)$$

Esta ecuación, a diferencia de la ecuación general (2.3.23) no depende de ningún campo gauge, puesto que estamos tratando los modelos split, es decir, aquellos modelos SSSG puramente masivos para los cuales la dimensión del grupo gauge es nula.

La posibilidad de expresar estas ecuaciones de movimiento en la forma de ecuación de curvatura nula nos indica la existencia de infinitas densidades conservadas que pueden obtenerse usando la construcción de Drinfel’d–Sokolov. De acuerdo con [4], esto requiere expresar la ecuación (2.5.107) como una ecuación de curvatura nula asociada con la gradación inducida por σ en el álgebra de lazos, lo cual es equivalente a introducir un parámetro espectral λ . Esto no resulta difícil porque las ecuaciones de movimiento

no cambian bajo la transformación $\Lambda_{\pm} \mapsto \lambda^{\mp 1} \otimes \Lambda_{\pm}$, de modo que, la ecuación (2.5.107) puede entenderse como una ecuación de curvatura nula asociada al álgebra de lazos

$$\mathcal{L}(\bar{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \lambda^j \otimes \bar{g}_j \subset \mathbb{C}[\lambda, \lambda^{-1}] \otimes \bar{g}, \quad (2.5.108)$$

también gradada con respecto al automorfismo σ , y a un operador de Lax de la forma,

$$L = \partial_- + \Lambda + q \quad (2.5.109)$$

con,

$$\Lambda \equiv m\lambda \otimes \Lambda_- \in \mathcal{L}(g)_1 \quad \text{y} \quad q = -\partial_- h h^\dagger \in \mathcal{L}(g)_0. \quad (2.5.110)$$

En este caso, y dado que $\sigma^2 = I$ la construcción de Drinfel'd–Sokolov parte de la existencia de un funcional local del potencial $q(x)$, de la forma

$$y = \sum_{k>0} y^\alpha (-2k) \lambda^{-2k} \otimes t^\alpha + \sum_{k \geq 0} y^{\bar{\alpha}} (-2k - 1) \lambda^{-2k-1} \otimes t^{\bar{\alpha}} \in \text{Im}(ad\Lambda)_{<0}, \quad (2.5.111)$$

es decir

$$y^\alpha (-2k - 1) = y^{\bar{\alpha}} (-2k) = 0, \quad (2.5.112)$$

tal que,

$$e^y (\partial_- + \Lambda + q) e^{-y} = \partial_- + \Lambda + H. \quad (2.5.113)$$

donde $H \in \text{Ker}(ad\Lambda)_{\leq 0}$.

Además, como consecuencia de las ecuaciones del movimiento (2.5.107) se verifica que,

$$e^y (\partial_+ + mh(\lambda^{-1} \otimes \Lambda_+) h^\dagger) e^{-y} = \partial_+ + \bar{H}. \quad (2.5.114)$$

donde \bar{H} toma también valores en el centralizador¹⁰ de Λ en $\mathcal{L}(g)_{\leq 0}$. Por lo tanto, y abelianiza el operador de Lax.

De este modo, la ecuación de curvatura nula (2.1.6) se simplifica, convirtiéndose en la siguiente:

$$\partial_- \bar{H} - \partial_+ H = [\bar{H}, H] = 0, \quad (2.5.115)$$

puesto que, en este caso, $\text{Ker}(ad\Lambda)$ es abeliano. Esto demuestra que las componentes de H y \bar{H} proporcionan un conjunto infinito de densidades locales conservadas, que se obtienen al expresar H y \bar{H} en términos de sus componentes respecto a la gradación (2.1.2),

$$H = \sum_{s \geq 1} I_{2s}^{(0)A} \lambda^{-2s+1} \otimes t^A, \quad \bar{H} = \sum_{s \geq 1} \bar{I}_{2s}^{(0)A} \lambda^{-2s+1} \otimes t^A. \quad (2.5.116)$$

Además y y H son funcionales locales de $q(x)$ e $I_{2s}^{(0)A}$ y $\bar{I}_{2s}^{(0)A}$ tienen dimensión de escala s con respecto a transformaciones del tipo $x_{\pm} \rightarrow \frac{x_{\pm}}{\rho}$. Por lo tanto, la ecuación de curvatura nula (2.5.107) se simplifica a

¹⁰El centralizador de Λ en $\mathcal{L}(\bar{g}, \sigma)_{<k}$ se define como el conjunto: $\{y \in \mathcal{L}(\bar{g}, \sigma)_{<k} \mid [y, \Lambda] = 0\}$.

$$\partial_+ I_{2s}^{(0)A} = \partial_- \bar{I}_{2s}^{(0)A}, \quad (2.5.117)$$

lo cual demuestra que, para cada spin o dimensión de escala $2s \geq 2$, existen $rank(G)$ densidades conservadas clásicamente $I_{2s}^{(0)A}, \bar{I}_{2s}^{(0)A}$, de spin par, mientras que las densidades conservadas asociadas con spines impares son todas nulas, como consecuencia de las igualdades (2.5.112).

En la práctica, la obtención explícita de las densidades conservadas clásicamente, es un proceso iterativo que consiste en seleccionar e igualar en ambos miembros de las ecuaciones (2.5.113) y (2.5.114) los sumandos que corresponden al mismo grado, con respecto a la gradación establecida en g mediante el automorfismo involutivo σ .

2.5.2 Densidades conservadas de spin 2.

En primer lugar es necesario introducir la siguiente notación para las constantes de estructura, que será utilizada en lo sucesivo:

$$f^{\vec{\alpha}\vec{\beta}\vec{\gamma}} = f^{\alpha\beta\gamma} = f^{\alpha\bar{\alpha}\beta} = f^{\alpha\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0, \quad \forall \vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} > 0, \quad (2.5.118)$$

$$f^{ABC} = f^{AB\alpha} = f^{AB\bar{\alpha}} = 0, \quad \forall \vec{\alpha} > 0 \quad \text{y} \quad \forall A, B = 1, \dots, rank(g), \quad (2.5.119)$$

$$f^{\alpha\bar{\alpha}A} = \alpha^A, \quad \forall \vec{\alpha} > 0 \quad \text{y} \quad \forall A = 1, \dots, rank(g). \quad (2.5.120)$$

De acuerdo con el procedimiento que explicábamos en el último párrafo de la sección anterior, consideremos la ecuación (2.5.113) y seleccionemos las componentes de grado $j = 0$. La ecuación resultante es:

$$[y(-1), \Lambda] + q_0 = H_0, \quad (2.5.121)$$

donde q_0 y H_0 son las componentes de grado 0 de q y H respectivamente. En particular q tiene grado 0, así que q_0 es realmente su única componente.

El potencial q tiene la forma $q = q^\alpha t^\alpha$, en términos de la base antihermítica presentada en la sección (2.4.4).

A partir de la ecuación (2.5.121) podemos obtener dos ecuaciones, proyectando en la CSA ó en la $Im(ad\Lambda)$, puesto que en este caso, estamos considerando Λ regular, es decir, $Ker(ad\Lambda) = CSA$. Obtenemos así las dos ecuaciones siguientes:

$$H_0 = 0, \quad (2.5.122)$$

$$[\Lambda, y(-1)] = q^\alpha t^\alpha, \quad (2.5.123)$$

es decir,

$$m\lambda^A f^{A\bar{\alpha}\alpha} y(-1)^{\bar{\alpha}t^\alpha} = q^\alpha t^\alpha \Rightarrow y^{\bar{\alpha}}(-1) = -\frac{q^\alpha}{m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})}, \quad (2.5.124)$$

para cualquier raíz $\vec{\alpha}$ positiva.

Por lo tanto, como ya sabíamos, las densidades conservadas asociadas a spin 1 son nulas para los modelos split, resultado que también se deriva si tomamos el obtenido

para los modelos HSG y hacemos $q^A = q^{\bar{\alpha}} = 0$, por las razones explicadas en la sección (2.4.1).

Pasemos ahora a grado $j = -1$, es decir spin 2. La ecuación que obtenemos es:

$$\underbrace{H_{-1}}_{Ker(ad\Lambda)} + \underbrace{[\Lambda, y(-2)]}_{Im(ad\Lambda)} = -\underbrace{\partial_- y(-1)}_{Im(ad\Lambda)} + \frac{1}{2} \underbrace{[y(-1), [y(-1), \Lambda]]}_{Im(ad\Lambda) \oplus Ker(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-1), q_0]}_{Im(ad\Lambda) \oplus Ker(ad\Lambda)}, \quad (2.5.125)$$

donde ya hemos indicado si los sumandos están en la CSA, en $Im(ad\Lambda)$ o si tienen parte en ambos. Así, de nuevo podemos separar esta ecuación en dos y la proyección en la CSA nos permiten obtener H_{-1}

$$H_{-1} = -\frac{1}{2} y(-1)^{\bar{\alpha}} q^{\alpha} \alpha^{AtA} = \frac{q^{\alpha} q^{\alpha}}{2m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \alpha^{AtA}, \quad (2.5.126)$$

de donde concluimos que las $rank(g)$ cantidades conservadas pueden expresarse del siguiente modo,

$$\mu^A I_2^{(0)A} = D_{\alpha\beta} q^{\alpha} q^{\beta}, \quad \text{con } D_{\alpha\beta} = \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{\alpha})}{2m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})}, \quad (2.5.127)$$

siendo μ^A un vector arbitrario contenido en la CSA.

Para $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$,

$$m\lambda^A \cdot I_2^{(0)A} = \frac{1}{2} q^{\alpha} q^{\alpha} = 2\pi\beta^2 T_{--}, \quad (2.5.128)$$

que es la relación esperada con el tensor energía-momento clásico.

También es interesante la ecuación que se obtiene proyectando en $Im(ad\Lambda)$, la cual nos permite obtener el valor de $y(-2)$ que necesitaremos para sustituir en las ecuaciones correspondientes a grados superiores. El resultado que se obtiene es

$$y^{\alpha}(-2) = \frac{\partial_- q^{\alpha}}{m^2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}} q^{\beta} q^{\gamma}}{2m^2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})}, \quad (2.5.129)$$

para cualesquiera raíces $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ y $\vec{\gamma}$ positivas.

2.5.3 Densidades conservadas de spin 4.

En el caso de spin 3 el resultado que obtenemos es también nulo, al igual que para spin 1 y para cualquier spin que sea impar. Consideremos la ecuación correspondiente a grado $j = -2$, la cual tiene la forma

$$\begin{aligned} \underbrace{H_{-2}}_{Ker(ad\Lambda)} + \underbrace{[\Lambda, y(-3)]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} &= \underbrace{[y(-2), q_0]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \frac{1}{3!} \underbrace{[y(-1), [y(-1), [y(-1), \Lambda]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} - \\ &-\frac{1}{2} \underbrace{[y(-1), \partial_- y(-1)]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} - \underbrace{\partial_- y(-2)}_{Im(ad\Lambda)} + \frac{1}{2} \underbrace{[y(-1), [y(-1), q_0]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \\ &+ \frac{1}{2} \underbrace{([y(-1)[y(-2), \Lambda]] + [y(-2), [y(-1), \Lambda]])}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)}. \end{aligned} \quad (2.5.130)$$

La proyección de esta ecuación en la CSA nos da como resultado

$$H_{-2} = 0, \quad (2.5.131)$$

como ya hemos indicado.

Por otra parte, la proyección en $Im(ad\Lambda)$ nos dará el valor de $y(-3)$ que, en principio, será necesario para la obtención de las densidades conservadas de spin 4.

La expresión de $y^{\bar{\alpha}}(-3)$ en función de $y^{\bar{\alpha}}(-1)$ e $y^{\alpha}(-2)$ es:

$$\begin{aligned} y^{\bar{\alpha}}(-3) = & \frac{-1}{m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \left\{ y^{\gamma}(-2) q^{\beta} f^{\gamma\beta\alpha} + \frac{m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})}{6} y^{\delta}(-1) y^{\bar{\beta}}(-1) y^{\bar{\gamma}}(-1) f^{\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\rho}} f^{\bar{\delta}\bar{\rho}\alpha} + \right. \\ & + \frac{m(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})}{2} \left\{ y^{\gamma}(-2) y^{\bar{\beta}}(-1) f^{\gamma\beta\alpha} - y^{\bar{\gamma}}(-1) y^{\beta}(-2) f^{\bar{\gamma}\bar{\beta}\alpha} \right\} - \\ & \left. - \frac{1}{2} y^{\bar{\gamma}}(-1) \partial_{-} y^{\bar{\beta}}(-1) f^{\bar{\gamma}\bar{\beta}\alpha} - \partial_{-} y^{\alpha}(-2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.5.132)$$

Pasemos entonces a considerar la ecuación correspondiente a grado $j = -3$. Su forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} \underbrace{H_{-3}}_{Ker(ad\Lambda)} + \underbrace{[\Lambda, y(-4)]}_{Im(ad\Lambda)} = & \underbrace{[y(-3), q_0]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \frac{1}{3!} \underbrace{[y(-1), [y(-1), [y(-1), q_0]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \\ & + \frac{1}{2} \underbrace{[y(-2), [y(-2), \Lambda]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \frac{1}{2} \left(\underbrace{[y(-1), [y(-3), \Lambda]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-3), [y(-1), \Lambda]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\underbrace{[y(-2), \partial_{-} y(-1)]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-1), [y(-2), q_0]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-2), [y(-1), q_0]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} \right) + \\ & + \frac{1}{3!} \left(\underbrace{[y(-1), [y(-1), [y(-2), \Lambda]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-1), [y(-2), [y(-1), \Lambda]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\underbrace{[y(-1), [y(-2), q_0]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} + \underbrace{[y(-2), [y(-1), q_0]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} \right) - \underbrace{\partial_{-} y(-3)}_{Im(ad\Lambda)} + \\ & + \frac{1}{4!} \left(\underbrace{[y(-1)[y(-1)[y(-1)[y(-1), \Lambda]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} - \frac{1}{2} \underbrace{[y(-1), \partial_{-} y(-2)]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} \right) + \\ & + \underbrace{[y(-2), [y(-1), [y(-1), \Lambda]]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)} - \underbrace{[y(-1), [y(-1), \partial_{-} y(-1)]]}_{Ker(ad\Lambda) \oplus Im(ad\Lambda)}. \end{aligned} \quad (2.5.133)$$

De nuevo, para obtener las densidades conservadas de spin 4 debemos proyectar esta ecuación en la CSA y, al hacerlo, se observa que

$$[y(-3), q_0]_{Ker(ad\Lambda)} + \frac{1}{2} \left([y(-1), [y(-3), \Lambda]] + [y(-3), [y(-1), \Lambda]] \right)_{Ker(ad\Lambda)} = 0, \quad (2.5.134)$$

lo cual significa que las densidades conservadas de spin 4 no dependen de $y(-3)$. Esta igualdad se comprueba fácilmente usando (2.5.123) y la identidad de Jacobi.

Proyectando (2.5.133) en la CSA obtenemos la forma de las densidades conservadas de spin 4,

$$\mu^A I_4^{(0)A} = R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)} q^\alpha q^\beta q^\gamma q^\rho + P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} q^\alpha q^\beta \partial_- q^\gamma + Q_{\alpha\beta}^{(0)} q^\alpha \partial_-^2 q^\beta, \quad (2.5.135)$$

donde¹¹

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)} = & \left(-\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\gamma}\cdot\vec{\mu})}{8m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})^2} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\xi}} f^{\xi\rho\alpha} (\vec{\alpha}\cdot\vec{\mu})}{6m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\xi})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})} + \right. \\ & \left. + \frac{f^{\bar{\rho}\alpha\bar{\xi}} f^{\bar{\xi}\gamma\beta}}{24m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\rho})} \left\{ -\frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\mu})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} + \frac{(\vec{\xi}\cdot\vec{\mu})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\xi})} \right\} \right)_{sim(\alpha\beta\gamma\rho)}, \end{aligned} \quad (2.5.136)$$

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} = & \left(\frac{f^{\gamma\alpha\beta}}{3m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})^2} \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\mu})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} + \frac{f^{\bar{\alpha}\gamma\bar{\beta}}}{4m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\mu})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} - \right. \\ & \left. - \frac{f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma}}}{4m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} \left\{ \frac{(\vec{\gamma}\cdot\vec{\mu})}{3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})} + \frac{(\vec{\beta}\cdot\vec{\mu})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} \right\} \right)_{sim(\alpha\beta\gamma)}, \end{aligned} \quad (2.5.137)$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(0)} = -\frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\mu})}{2m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})^3} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.5.138)$$

Estas expresiones se simplifican notablemente para la densidad conservada correspondiente a $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$, en cuyo caso

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = -\frac{1}{24m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})} \left\{ \frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})} \{ \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho}\delta_{\gamma\beta} \} + \frac{(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\rho} \right\}, \quad (2.5.139)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = \frac{-1}{6m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\gamma})} \left\{ \frac{f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma}}}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\beta})} + \frac{f^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}}{(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})} \right\}, \quad (2.5.140)$$

$$Q_{\alpha\beta}^{(0)} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{2m^3(\vec{\lambda}\cdot\vec{\alpha})^2}. \quad (2.5.141)$$

Con esto damos por concluido nuestro estudio de la integrabilidad clásica de los modelos split, además de presentar de forma concreta el procedimiento sistemático que permite a obtener las infinitas densidades conservadas de la teoría.

Debemos también señalar que este mismo procedimiento puede aplicarse a la ecuación (2.5.114) para la obtención de los campos $\vec{I}_{2s}^{(0)}$ que completan las leyes de conservación (2.5.117).

¹¹En los siguientes tensores los subíndices $sim(\alpha\beta\gamma\rho)$ y $sim(\alpha\beta)$ indican que han de considerarse las expresiones dadas totalmente simetrizadas en $(\alpha\beta\gamma\rho)$ y $(\alpha\beta)$ respectivamente.

Por otra parte, si deseamos obtener densidades conservadas con spines negativos ($I_{-2s}^{(0)}$, con $s \geq 1$) debemos considerar el siguiente operador de Lax:

$$\bar{L} = \partial_+ + m\lambda^{-1} \otimes \Lambda_+ + h^{-1}\partial_+h, \quad (2.5.142)$$

el cual se obtiene al transformar el operador de Lax (2.5.109) del siguiente modo:

$$x_- \rightarrow x_+, \quad \lambda \otimes \Lambda_- \rightarrow \lambda^{-1} \otimes \Lambda_+ \quad \text{y} \quad -\partial_-hh^\dagger \rightarrow h^{-1}\partial_+h. \quad (2.5.143)$$

Estas densidades de spines negativos tienen una gran importancia, especialmente a nivel cuántico, puesto que, como veremos con detalle en el capítulo 4 de esta tesina, existe un argumento debido a Parke [13] por el cual la integrabilidad cuántica de una teoría queda garantizada con la comprobación de la existencia de al menos dos densidades conservadas de spin superior (mayor que 1 en módulo), con spines diferentes en módulo y de signos opuestos. Por lo tanto, es conveniente recordar que, aunque habitualmente calculemos sólo densidades de spines positivos, cada una de ellas lleva asociada siempre otra de spin opuesto.

Capítulo 3

Clasificación y propiedades de los modelos split.

Este capítulo está dedicado al estudio de la clasificación de los modelos split mediante la determinación de las características más importantes de cada uno de ellos.

En primer lugar trataremos el problema de la clasificación, presentando tres posibles métodos, para luego continuar nuestro estudio eligiendo una de estas posibilidades: el establecimiento de una relación entre los modelos SSSG de tipo I y los automorfismos involutivos de la complexificación del álgebra real y compacta g .

Esta relación se concreta en una serie de teoremas que presentamos en este capítulo y que nos proporcionan un procedimiento sistemático, no sólo para establecer una clasificación de los modelos SSSG de tipo I y, en particular, de los modelos split, sino también para caracterizar totalmente estos modelos mediante la determinación de la dimensión conforme de la perturbación correspondiente a cada caso.

3.1 Modelos SSSG de tipo I: tres métodos para establecer su clasificación.

Como hemos visto en el capítulo anterior, la construcción de los modelos SSSG de tipo I se basa en un álgebra de Lie g real, simple, finita y compacta que, bajo la acción de un automorfismo involutivo σ , se descompone en dos subespacios, $g = g_0 \oplus g_1$, que satisfacen

$$[g_0, g_1] \subset g_1, [g_0, g_0] \subset g_0, [g_1, g_1] \subset g_0. \quad (3.1.1)$$

Por lo tanto, existe una relación de la forma

$$\text{Modelos SSSG tipo I} \Leftrightarrow (g, \sigma) \text{ con } \sigma^2 = I. \quad (3.1.2)$$

Pero existen otros dos modos de establecer la clasificación de los modelos SSSG de tipo I que resultarán más útiles para nuestros propósitos. El primero de ellos consiste en relacionar los modelos SSSG de tipo I con las distintas formas reales de la complexificación \bar{g} de g . Esta relación se establece del siguiente modo [32]:

Sea g un álgebra de Lie simple, real y compacta y σ un automorfismo involutivo tal que $g = g_0 \oplus g_1$ es la descomposición de g en autoespacios de dicho automorfismo. Definamos $g^\sigma = g_0 \oplus ig_1$. Entonces g^σ es una forma real de la complexificación ¹ $\bar{g} = g^{\mathbb{C}}$ distinta de la forma real compacta g .

Por lo tanto, cada automorfismo involutivo de g define una nueva forma real de su complexificación y es posible probar que el resultado inverso es también cierto, es decir, dada una forma real de \bar{g} se le puede asociar un automorfismo involutivo σ de la forma real compacta g .

En resumen,

$$\text{Modelos SSSG tipo I} \Leftrightarrow g^\sigma \equiv \text{formas reales de } \bar{g}. \quad (3.1.3)$$

Como sabemos, dada un álgebra de Lie compleja \bar{g} , una forma real de \bar{g} es una subálgebra d_0 del álgebra compleja \bar{g} , tal que $\bar{g} = d_0 + id_0$, de modo que cualquier elemento $X \in \bar{g}$ puede expresarse como $X = x + iy$, con $x, y \in d_0$, es decir, \bar{g} es isomorfa a la complexificación de d_0 . Para cada álgebra \bar{g} existen dos formas reales de especial interés:

- Forma real compacta.

Puede demostrarse que toda álgebra de Lie compleja simple ó semisimple posee una forma real compacta, única salvo conjugación. El teorema de Weyl [34] establece que un grupo real de Lie semisimple es compacto si y solo si la forma de Cartan–Killing² de su álgebra de Lie es definida negativa.

Como consecuencia de este teorema, un álgebra de Lie real se dice compacta si su forma de Cartan–Killing es definida negativa.

En el caso de los modelos SSSG, el campo $h(x, t)$ vive en un grupo de Lie real y compacto G_0 asociado a un álgebra de Lie g_0 reductiva, es decir, de la forma:

$$g_0 = g_{ss} \oplus u(1) \oplus \cdots \oplus u(1), \quad (3.1.4)$$

de modo que g_{ss} es un álgebra de Lie semisimple compacta, puesto que su forma bilineal es la inducida por el álgebra de Lie compacta g y es definida negativa, y el carácter “compacto” de las subálgebras $u(1)$ queda garantizado por existir siempre la posibilidad de elegir una forma bilineal de signo definido, que puede ser en particular negativo, de manera que los generadores $u(1)$ también satisfacen la relación (2.4.37).

- Forma real normal, “split” o maximalmente no compacta.

¹Es sencillo comprobar que g^σ es un álgebra, puesto que los conmutadores cierran.

²La forma de Cartan–Killing de un álgebra de Lie \bar{g} se define como:

$$K(x, y) = \text{Tr} \left(ad(x)ad(y) \right),$$

siendo x, y elementos de \bar{g} y $ad(x), ad(y)$ los mismos elementos tomados en la representación adjunta del álgebra de Lie.

Introduzcamos primero lo que se entiende por una descomposición de Cartan. Sea s una forma real de un álgebra semisimple y compleja \bar{g} y sea σ la conjugación³ de \bar{g} con respecto a s . Una descomposición $s = s_0 \oplus s_1$ se denomina descomposición de Cartan si existe una forma real compacta g de \bar{g} tal que:

$$\sigma \cdot g \subset g, \quad s_0 = s \cap g, \quad s_1 = s \cap (ig). \quad (3.1.5)$$

En el caso en que el subespacio s_1 de $s = s_0 \oplus s_1$ contiene una subálgebra maximal abeliana de s para toda descomposición de Cartan se dice que s es una forma real split o normal de \bar{g} . Además, dos descomposiciones de Cartan, $s = s_0 \oplus s_1$ y $s' = s'_0 \oplus s'_1$ se dicen isomorfas si las subálgebras s_0 y s'_0 lo son.

Podemos ahora explicar ya el porqué de la denominación de nuestros modelos como modelos split. Ésta se debe al hecho de que estos modelos se corresponden precisamente con los casos en los cuales la forma real introducida anteriormente $g^\sigma = g_0 \oplus ig_1$, es la forma real split.

3.1.1 Ejemplos: $su(n)$, $so(n)$ y $sp(n)$.

A continuación presentamos tres ejemplos extraídos de [32] y correspondientes a los casos en que la forma real compacta g es $su(n)$, $so(n)$ ó $sp(n)$. Hemos elegido precisamente estos casos porque dan lugar a espacios simétricos del tipo split y suponen ejemplos de las relaciones (3.1.2) y (3.1.3).

- Tipo A I, $g = su(n)$ y $\sigma(X) = X^*$.

En este caso $g_0 = so(n)$ y g_1 es el subconjunto formado por todas las matrices $n \times n$ simétricas, puramente imaginarias, de traza nula.

La forma real correspondiente a σ es $g^\sigma = g_0 \oplus ig_1 = sl(n, \mathbb{R})$. Ahora bien, esta forma real es precisamente la forma real split, tal y como la hemos definido en la sección anterior, ya que las matrices diagonales en g_1 forman un subespacio abeliano maximal y, por lo tanto, el rango del espacio simétrico es $n - 1$, coincidiendo con el rango de $\bar{g} = a_{n-1}$.

Los correspondientes espacios simétricos asociados son

$$SU(n)/SO(n), \quad SL(n, \mathbb{R})/SO(n) \quad (n > 1), \quad (3.1.6)$$

³La aplicación

$$\sigma : x + iy \rightarrow x - iy, \quad x, y \in d_0,$$

se denomina conjugación de \bar{g} con respecto a d_0 . Esta aplicación tiene las propiedades:

$$\sigma(\sigma(x)) = x, \quad \sigma(\alpha x) = \alpha^* \sigma(x), \quad \sigma(x + y) = \sigma(x) + \sigma(y), \quad \sigma([x, y]) = [\sigma(x), \sigma(y)].$$

El primero de ellos es el que se obtiene de la relación (3.1.2) y es un espacio simétrico compacto de rango máximo que, como ya habíamos indicado en la tabla (2.2) se corresponde con un modelo split.

El segundo espacio simétrico es no compacto y, por lo tanto no corresponde a ningún modelo SSSG. Su único interés es que está asociado a la forma real split g^σ , es decir existirá un automorfismo σ' que produzca la descomposición de la forma split g^σ en los subespacios g_0 e ig_1 y el espacio simétrico asociado a dicha descomposición será $G^\sigma/G_0 = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$. Este espacio simétrico es uno de los que Helgason denomina de tipo III en [32].

En los restantes ejemplos presentaremos únicamente los espacios simétricos compactos de tipo split, que son los únicos relevantes en nuestro trabajo.

- Tipo BD I, $g = so(p+q)$ y $\sigma(X) = I_{p,q}X I_{p,q}$ ($p \geq q$).

En este caso el automorfismo σ viene dado por unas matrices $I_{p,q}$ que tienen la forma

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix},$$

donde I_p e I_q son matrices identidad $p \times p$ y $q \times q$ respectivamente.

En este caso

$$g_0 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

con $A \in so(p)$ y $B \in so(q)$, y

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & X \\ -X^t & 0 \end{pmatrix},$$

donde X es una matriz real $p \times q$ y X^t es su traspuesta.

Puede demostrarse que la aplicación

$$\begin{pmatrix} A & iX \\ -iX^t & B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A & X \\ X^t & B \end{pmatrix},$$

es un automorfismo de g^σ en $so(p, q)$.

En este caso $g^\sigma = SO_0(p, q)$, donde $SO_0(p, q)$ denota a la componente conectada con la identidad de $SO(p, q)$.

Los espacios simétricos compactos y simplemente conectados asociados con $so(p, q)$ y (g, σ) son de la forma:

$$SO(p+q)/SO(p) \times SO(q), \tag{3.1.7}$$

con $p > 1$, $q \geq 1$, $p+q \neq 4$ y $p \geq q$.

Un subespacio maximal abeliano de g_1 viene dado por

$$h_{g_1} = \sum_{i=1}^q \mathbf{R}(E_{i,p+i} - E_{p+i,i}), \tag{3.1.8}$$

donde las matrices $E_{i,j}$ son matrices cuya única componente no nula es la que ocupa el lugar (i, j) .

El rango del espacio simétrico es entonces q . Para determinar cuáles de estos espacios simétricos están asociados a la forma real split debemos determinar cuándo este rango es maximal. Existen dos casos:

- Si $p + q$ es par, entonces g^σ es una forma real split de \bar{g} si y sólo si $p = q$.
- Si $p + q$ es impar, entonces g^σ es una forma real split de \bar{g} si y sólo si $p = q + 1$.

Estos son precisamente los casos que figuran en la tabla (2.2).

- Tipo C I, $g = sp(n)$ y $\sigma(X) = J_n X J_n^{-1}$.

En este caso el automorfismo σ viene dado por las matrices simplécticas J_n que tienen la forma

$$J_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix},$$

donde I_n es la matriz identidad $n \times n$.

En este caso $g_0 = sp(n) \cap so(2n)$ que es isomorfo a $u(n)$. Por otra parte los elementos de g_1 son de la forma

$$\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_2 & -Z_1 \end{pmatrix},$$

donde $Z_1 \in u(n)$ es una matriz imaginaria pura y Z_2 es una matriz simétrica también imaginaria pura.

Por tanto, $g^\sigma = g_0 \oplus i g_1 = sp(n, \mathbb{R})$. El correspondiente espacio simétrico compacto simplemente conectado es

$$Sp(n)/U(n) \quad (n \geq 1). \tag{3.1.9}$$

Las matrices diagonales de g_1 forman un espacio maximal abeliano. Por lo tanto el rango del espacio simétrico es n y g^σ es una forma real split de \bar{g} .

Pero, existe aún una tercera forma de entender la clasificación de los modelos SSSG de tipo I que resulta ser la más interesante para nuestros propósitos. Esto es debido a que nos ofrece un procedimiento sistemático para caracterizar totalmente los modelos split, obteniendo la dimensión conforme del campo que actúa como perturbación y, a partir de ella, las condiciones que sobre el nivel k impone la construcción de teorías super-renormalizabilizables a primer orden. Por todo esto, será la que utilizaremos en lo sucesivo.

Esta tercera forma es la que presenta Helgason [32] y se basa en la clasificación de Kac de los automorfismos de orden finito de \bar{g} . Kac estableció una correspondencia entre los automorfismos de orden 2 de \bar{g} y las involuciones de g , la forma real compacta de \bar{g} . El resultado establecido por Kac proporciona la siguiente relación:

$$\text{Modelos SSSG tipo I} \Leftrightarrow \text{involuciones de } g \Leftrightarrow \text{involuciones de } \bar{g}. \quad (3.1.10)$$

La razón técnica de la anterior relación es la siguiente [32].

Sea $Aut(g)$ el conjunto de automorfismos de g , la forma real compacta de \bar{g} , $Inv(g)$ el subconjunto involutivo de éstos e $Inv(g)/Aut(g)$ el conjunto de clases de conjugación en $Aut(g)$ de los elementos de $Inv(g)$. Definimos $Inv(\bar{g})/Aut(\bar{g})$ de modo similar.

Cada automorfismo $\sigma \in Inv(g)$ se extiende únicamente a $\bar{\sigma} \in Inv(\bar{g})$ y si σ_1 y σ_2 fuesen conjugados bajo $Aut(g)$, entonces $\bar{\sigma}_1$ y $\bar{\sigma}_2$ lo serían bajo $Aut(\bar{g})$.

Entonces la aplicación

$$\tau : Inv(g)/Aut(g) \rightarrow Inv(\bar{g})/Aut(\bar{g}), \quad (3.1.11)$$

inducida por $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$ resulta ser una biyección.

Así pues, la extensión al dominio complejo de σ produce un automorfismo involutivo $\bar{\sigma}$ de \bar{g} , cuya actuación es de la forma

$$\bar{\sigma} : (a + ib)X \mapsto a\sigma(X) + ib\sigma(X), \quad (3.1.12)$$

con a, b reales y $X \in g$.

Por lo tanto, el tercer método para clasificar los modelos SSSG de tipo I se basa en utilizar la siguiente relación:

$$\text{Modelos SSSG tipo I} \Leftrightarrow \text{Involuciones de } \bar{g}. \quad (3.1.13)$$

3.2 Relación entre modelos SSSG de tipo I e involuciones de \bar{g} .

Este tercer método para la clasificación de los modelos SSSG que acabamos de mencionar nos permitirá concluir que los modelos SSSG de tipo I pueden ser interpretados como las soluciones (s_0, \dots, s_l) de la ecuación

$$m = r \sum_{i=0}^l a_i s_i, \quad (3.2.14)$$

donde $m = 2$ para este caso, pues estamos considerando involuciones (automorfismos de orden 2), r representa el orden de un automorfismo μ del diagrama de Dynkin de \bar{g} , a_i son las etiquetas de Kac del diagrama de Dynkin de $\bar{g}^{(r)}$ y \vec{s} es un conjunto de enteros no negativos y primos entre sí asociados con los nodos del diagrama de $\bar{g}^{(r)}$. Más adelante veremos que (s_0, \dots, s_l) determina una gradación de $\bar{g}^{(r)}$.

Para entender este resultado, que será fundamental en todas las conclusiones que extraeremos de este capítulo, debemos enunciar una serie de teoremas cuya demostración detallada puede verse en [33], pero previamente es necesario que introduzcamos cierta notación.

Sea \bar{g} un álgebra de Lie compleja y simple y μ un automorfismo de dicha álgebra de Lie inducido por un automorfismo del diagrama de Dynkin, (de orden $r = 1, 2$ ó 3). Como sabemos μ induce una $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ -gradación de \bar{g} de la forma:

$$\bar{g} = \bar{g}_0(\mu) \oplus \cdots \oplus \bar{g}_{r-1}(\mu). \quad (3.2.15)$$

Existe entoces un conjunto de generadores de \bar{g} , $\{E_0, E_1, \dots, E_l\}$, siendo l el rango de la subálgebra $\bar{g}_0(\mu)$, tales que:

a) $\{E_1, \dots, E_l\} \in \bar{g}_0(\mu)$, para $\bar{g}^{(r)} \neq A_{2l}^{(2)}$ y $\{E_0, E_1, \dots, E_{l-1}\} \in \bar{g}_0(\mu)$ para $\bar{g}^{(r)} = A_{2l}^{(2)}$.

b) Si $\bar{g}^{(r)} \neq A_{2l}^{(2)}$, entonces $E_0 \in \bar{g}_1(\mu)$ es el vector de peso mínimo de la representación irreducible de $\bar{g}_0(\mu)$ dada por la relación:

$$[\bar{g}_0(\mu), \bar{g}_1(\mu)] \subset \bar{g}_1(\mu), \quad (3.2.16)$$

mientras que, cuando $\bar{g}^{(r)} = A_{2l}^{(2)}$, este papel es desempeñado por E_l .

c) $\{E_1, \dots, E_l\}$ son generadores positivos de Chevalley de $\bar{g}_0(\mu)$, salvo en el caso $\bar{g}^{(r)} = A_{2l}^{(2)}$, en el cual los generadores son $\{E_0, E_1, \dots, E_{l-1}\}$.

d) Los resultados anteriores a), b), c) corresponden al caso $r > 1$. Cuando $r = 1$, $\bar{g}^{(1)}$ es el álgebra de Lie afín “untwisted” y se verifica que $l = \text{rank}(\bar{g})$, $E_0 = E_{-\Psi_g}$, siendo Ψ_g la raíz máxima, y $E_i = E_{\alpha_i}$ siendo $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ las raíces simples de \bar{g} .

La clasificación de todos los espacios simétricos de tipo I se basa en los siguientes teoremas:

Teorema I [Teorema 8.5 de [33]]:

Sea \bar{g} un álgebra de Lie compleja y finita y σ un automorfismo de orden m de \bar{g} . Sea r el menor entero positivo tal que σ^r es un automorfismo interno, entonces:

a) $r=1, 2$ ó 3 .

b) $\bar{g}^{(r)} \simeq \mathcal{L}(\bar{g}, \sigma) \oplus \mathbb{C}K \oplus \mathbb{C}d$, donde $\mathcal{L}(\bar{g}, \sigma)$ es el álgebra de lazos,

$$\mathcal{L}(\bar{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_j(\bar{g}, \sigma) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} z^j \otimes \bar{g}_j, \quad (3.2.17)$$

que está también gradada con respecto al automorfismo de \bar{g} , puesto que se satisfacen las relaciones

$$[\mathcal{L}_j, \mathcal{L}_k] \subset \mathcal{L}_{j+k}, \quad (3.2.18)$$

K es una extensión central y d es una derivación.

c) La \mathbb{Z} -gradación del álgebra de lazos (3.2.17) inducida por el automorfismo σ induce a su vez una gradación del álgebra afín $\bar{g}^{(r)}$ de tipo (s_0, s_1, \dots, s_l) , tal que se verifica la siguiente relación:

$$m = r \sum_{i=0}^l a_i s_i, \quad (3.2.19)$$

donde a_0, a_1, \dots, a_l son las etiquetas de Kac correspondientes al diagrama de Dynkin de $\bar{g}^{(r)}$.

Teorema II [Teorema 8.6 de [33]]:

Sea $\vec{s} = (s_0, s_1, \dots, s_l)$, una secuencia de enteros no negativos primos entre sí. Tomemos m igual al valor dado por la igualdad (3.2.19), entonces se verifica que:

a) Las relaciones

$$\sigma_{s;r}(E_j) = e^{2\pi i s_j / m} E_j, \quad j = 0, \dots, l, \quad (3.2.20)$$

definen unívocamente un automorfismo de orden m de \bar{g} que se denominará automorfismo de tipo $(\vec{s}; r)$.

b) Bajo conjugación mediante un automorfismo de \bar{g} , los automorfismos del tipo $\sigma_{s;r}$ producen todos los automorfismos posibles de orden m de \bar{g} .

c) Los elementos $\sigma_{(s;r)}$ y $\sigma_{(s';r')}$ son conjugados bajo un automorfismo de \bar{g} si y sólo si $r = r'$ y la secuencia \vec{s} puede ser transformada en la secuencia \vec{s}' bajo un automorfismo del diagrama de Dynkin de $\bar{g}^{(r)}$.

Enunciamos ahora el principal teorema de esta sección. Este teorema constituye una enumeración exacta de los pasos que hemos de seguir en nuestra caracterización de los modelos SSSG de tipo I.

Teorema III [Proposición 8.6 de [33]]:

Sea la gradación (s_0, \dots, s_l) anteriormente definida y $r = 1, 2$ ó 3 . Sea $\bar{g} = \bigoplus_j g_j(\vec{s}; r)$ la $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -gradación inducida por el automorfismo $\sigma_{(s;r)}$, definido en el Teorema II.

Se verifican las siguientes propiedades:

a) r es el menor entero positivo para el cual el automorfismo $\sigma_{(s;r)}^r$ es un automorfismo interno⁴.

b) Sean i_1, i_2, \dots, i_p los índices para los cuales $s_{i_1} = \dots = s_{i_p} = 0$. Entonces el álgebra de Lie invariante bajo el automorfismo, \bar{g}_0 , es isomorfa a una suma directa del centro $(l-p)$ -dimensional y un álgebra de Lie semisimple cuyo diagrama de Dynkin es el subdiagrama del diagrama afín asociado a $\bar{g}^{(r)}$ consistente en los vértices i_1, \dots, i_p .

c) Sean j_1, \dots, j_n todos los índices para los cuales $s_{j_1} = \dots = s_{j_n} = 1$. Entonces la representación reducible de peso máximo de \bar{g}_0 dada por \bar{g}_1 a través de la relación $[\bar{g}_0, \bar{g}_1] \subset \bar{g}_1$ es isomorfa a la suma directa de los módulos irreducibles de pesos máximos $-\alpha_{j_1}, \dots, -\alpha_{j_n}$.

⁴Un automorfismo interno τ de un álgebra de Lie compleja \bar{g} , es un automorfismo cuya acción sobre un elemento arbitrario del álgebra X puede expresarse como $\tau(X) = \gamma X \gamma^{-1}$ donde $\gamma \in \bar{G}$.

De acuerdo con los anteriores teoremas y teniendo en cuenta la relación existente entre modelos SSSG de tipo I e involuciones del álgebra compleja \bar{g} , la ecuación a resolver es

$$m = 2 = r \sum_{i=0}^l a_i s_i, \quad (3.2.21)$$

como ya habíamos adelantado, y para ella tenemos tres tipos diferentes de soluciones que nos darán tres tipos de modelos:

$$[A_1] \quad r = 1, \quad a_{i_0} = 2, \quad s_{i_0} = 1, \quad s_i = 0 \text{ para } i \neq i_0, \quad (3.2.22)$$

$$[A_2] \quad r = 2, \quad a_{i_0} = 1, \quad s_{i_0} = 1, \quad s_i = 0 \text{ para } i \neq i_0, \quad (3.2.23)$$

$$[B] \quad r = 1, \quad a_{i_0} = a_{i_1} = 1, \quad s_{i_0} = s_{i_1} = 1, \quad s_i = 0 \text{ para } i \neq i_0, i_1. \quad (3.2.24)$$

De acuerdo con el Teorema III en los casos A_1 y A_2 , \bar{g}_0 es semisimple, mientras que en el caso B tiene un centro unidimensional. Nótese que el caso $(s_0, \dots, s_l) = (2, 0, \dots, 0)$ no se toma en cuenta ya que los s_i no deben tener ningún factor común (son primos entre sí).

Una vez conocido el procedimiento a seguir para la clasificación de los modelos SSSG asociados con espacios simétricos de tipo I, hay que indicar que nosotros vamos a fijarnos sólo en algunos de éstos, los modelos split, es decir, los correspondientes a espacios simétricos de rango maximal, aunque, como hemos visto, el procedimiento a seguir sería el mismo para todos los demás. Los espacios simétricos a los que nos referimos son los que se presentaban en la tabla (2.2).

3.2.1 Modelos split de tipo $[A_1]$, $[A_2]$ y $[B]$.

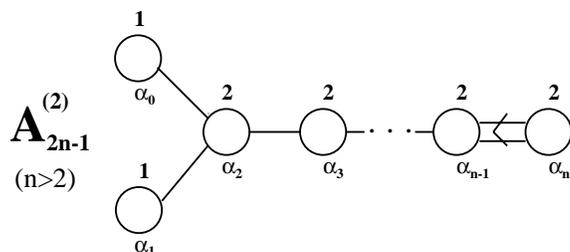
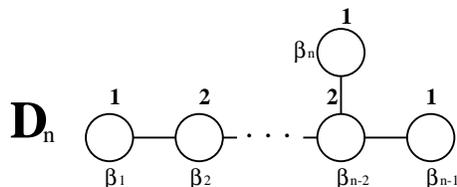
El siguiente paso es ahora determinar con cuál de las clases (3.2.22), (3.2.23) ó (3.2.24) se corresponden los modelos split de la tabla (2.2). Para ello trataremos algunos de los ejemplos más significativos, entendiendo que el procedimiento a seguir será similar para todos los demás.

$$1. \quad G/G_0 = SU(2n)/SO(2n), \quad \bar{g}^{(r)} = A_{2n-1}^{(2)}, \quad \bar{g}_0 = D_n, \text{ con } n > 2.$$

Siguiendo los pasos que indica el teorema III, y teniendo en cuenta que debe cumplirse $2 = r \sum_{i=0}^n a_i s_i$ debemos elegir la gradación \vec{s} y el valor de r de manera tal que, el diagrama de Dynkin que se obtiene al eliminar los nodos del diagrama de Dynkin de $A_{2n-1}^{(r)}$ correspondientes a valores nulos de las componentes s_i de la gradación \vec{s} sea precisamente el diagrama de Dynkin de la subálgebra invariante $\bar{g}_0 = D_n$.

En este caso existirían, en principio, dos posibilidades de elección para r , $r = 1$ y $r = 2$, que corresponden al álgebra afín “untwisted” $A_{2n-1}^{(1)}$ y al álgebra afín “twisted” $A_{2n-1}^{(2)}$, sin embargo, basta observar sus correspondientes diagramas de Dynkin para concluir que sólo eligiendo $r = 2$ podemos obtener el diagrama de Dynkin de D_n a partir del de $A_{2n-1}^{(r)}$.

Los diagramas de Dynkin correspondientes a $\bar{g}^{(r)}$ y a \bar{g}_0 son los que a continuación se presentan:

Figura 3.1: Diagrama de Dynkin de $A_{2n-1}^{(2)}$.Figura 3.2: Diagrama de Dynkin de D_n .

Una vez elegido $r = 2$, para que se satisfaga la condición (3.2.21) la gradación debe tener una sola componente no nula, que se corresponda con una raíz para la cual $a_i = 1$, y tal que al eliminar dicha raíz del diagrama de Dynkin se genere justamente el diagrama de Dynkin de \bar{g}_0 , tal y como indica el apartado b) del teorema III.

La gradación que tenemos que elegir es pues

$$\vec{s} = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad (3.2.25)$$

dado que, solamente “eliminando” la raíz $\vec{\alpha}_n$, para la cual $a_n = 1$, producimos el diagrama de Dynkin de D_n . Por lo tanto, estamos ante un modelo del tipo $[A_2]$.

Observando los diagramas de Dynkin es posible extraer también otro resultado de interés, como es la relación entre los cuadrados de las raíces largas en \bar{g} y \bar{g}_0 . Como acabamos de explicar, el diagrama de Dynkin de D_n puede obtenerse a partir del de $A_{2n-1}^{(2)}$ sin más que eliminar en este último la raíz $\vec{\alpha}_n$, que es justamente la única raíz larga, con longitud doble a la de las demás, así que está claro que $\Psi_g^2 / \Psi_{g_0}^2 = 2$, resultado que podemos comprobar también por otras vías.

Por otra parte, sabemos que se verifica la propiedad

$$\sum_{i=0}^n a_i \vec{\alpha}_i = 0, \quad (3.2.26)$$

es decir,

$$\vec{\alpha}_n + \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 + 2\vec{\alpha}_2 + \dots + 2\vec{\alpha}_{n-1} = 0 \Rightarrow -\vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_0 + \vec{\alpha}_1 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \vec{\alpha}_i = \vec{\Lambda}, \quad (3.2.27)$$

donde $\vec{\Lambda}$ es el peso máximo, tal y como indica el apartado c) del teorema III.

Si ahora hacemos un cambio de notación en la ecuación anterior para ajustarla a la del diagrama de Dynkin de $so(2n)$ obtenemos

$$\vec{\Lambda} = \vec{\beta}_n + \vec{\beta}_{n-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \vec{\beta}_i, \tag{3.2.28}$$

mientras que la raíz larga de D_n es

$$\vec{\theta}_{D_n} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_n + \vec{\beta}_{n-1} + 2 \sum_{i=2}^{n-2} \vec{\beta}_i. \tag{3.2.29}$$

Por lo tanto,

$$\vec{\Lambda} = \vec{\theta}_{D_n} + \vec{\beta}_1. \tag{3.2.30}$$

Si ahora escribimos las raíces de D_n utilizando la base ortonormal \vec{v}_i habitual que presentamos en el apéndice C tenemos

$$\vec{\theta}_{D_n} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{\beta}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \tag{3.2.31}$$

es decir

$$\vec{\Lambda} = 2\vec{v}_1. \tag{3.2.32}$$

El expresar el peso máximo de este último modo será útil para la obtención de la dimensión conforme correspondiente a la perturbación en estos modelos.

2. $G/G_0 = SO(4n + 1)/SO(2n) \times SO(2n + 1)$, $\bar{g}^{(r)} = B_{2n}^{(1)}$, $\bar{g}_0 = B_n \oplus D_n$, con $n > 1$.

Vamos ahora a considerar este segundo ejemplo por ser interesante ver cuál es el procedimiento a seguir cuando el grupo \bar{g}_0 no es simple sino que se descompone en dos subgrupos simples. Como veremos a continuación, los cambios no son realmente muy notables.

Los diagramas de Dynkin son ahora los tres que se presentan en las figuras (3.3), (3.4) y (3.5).

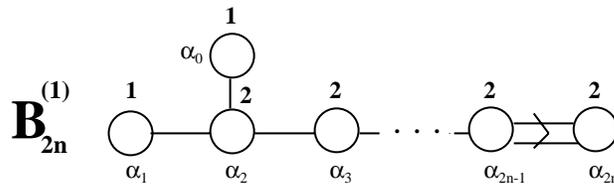
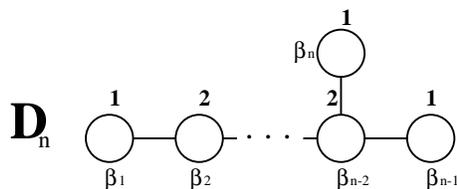
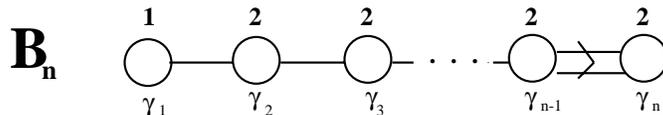


Figura 3.3: Diagrama de Dynkin de $B_{2n}^{(1)}$.

El orden del automorfismo es $r = 1$ en este caso y la gradación a elegir es

$$\vec{s} = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0, 0), \tag{3.2.33}$$

Figura 3.4: Diagrama de Dynkin de D_n .Figura 3.5: Diagrama de Dynkin de B_n .

donde el valor 1 se correspondería con la componente s_n , puesto que, si en el diagrama de Dynkin de $B_{2n}^{(1)}$ eliminamos la raíz $\vec{\alpha}_n$, correspondiente a $a_n = 2$, obtenemos precisamente los diagramas de D_n y B_n . Podemos entonces decir que este espacio simétrico corresponde a un modelo de tipo $[A_1]$.

En este caso la observación de los diagramas de Dynkin nos dice que el cuadrado de las raíces largas de las tres álgebras es el mismo, y por lo tanto, igual a 2, ya que las raíces largas de $B_{2n}^{(1)}$ pasan a serlo de D_n y B_n al dividir su diagrama de Dynkin por la raíz $\vec{\alpha}_n$.

Utilizando ahora de nuevo la relación (3.2.26) para $B_{2n}^{(1)}$ obtenemos el peso máximo $\vec{\Lambda}$,

$$2\vec{\Lambda} = -2\vec{\alpha}_n = \vec{\alpha}_1 + \vec{\alpha}_0 + 2 \sum_{i=2}^{n-1} \vec{\alpha}_i + 2 \sum_{i=n+1}^{2n} \vec{\alpha}_i, \quad (3.2.34)$$

y, utilizando la notación para las raíces de D_n y B_n , obtenemos

$$2\vec{\Lambda} = \vec{\beta}_n + \vec{\beta}_{n-1} + 2 \sum_{i=1}^{n-2} \vec{\beta}_i + 2 \sum_{i=1}^n \vec{\gamma}_i. \quad (3.2.35)$$

Por otra parte, las raíces largas de D_n y B_n tienen la forma

$$\vec{\theta}_{D_n} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_n + \vec{\beta}_{n-1} + 2 \sum_{i=2}^{n-2} \vec{\beta}_i, \quad (3.2.36)$$

$$\vec{\theta}_{B_n} = \vec{\gamma}_1 + 2 \sum_{i=2}^n \vec{\gamma}_i, \quad (3.2.37)$$

por lo tanto:

$$2\vec{\Lambda} = \vec{\theta}_{D_n} + \vec{\beta}_1 + \vec{\theta}_{B_n} + \vec{\gamma}_1, \quad (3.2.38)$$

y utilizando de nuevo la forma de las raíces de D_n y B_n en términos de las bases ortonormales del apéndice C obtenemos

$$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{(D_n)} + \vec{v}_1^{(B_n)}. \quad (3.2.39)$$

3. $G/G_0 = Sp(n)/U(n) = Sp(n)/SU(n) \times U(1)$, $\bar{g}^{(r)} = C_n^{(1)}$, $\bar{g}_0 = A_{n-1} \oplus u(1)$, con $n > 1$.

Finalmente vamos a estudiar un tercer ejemplo que se corresponde con el único caso de la tabla (2.2) de tipo $[B]$.

Como siempre empezaremos presentando los correspondientes diagramas de Dynkin:

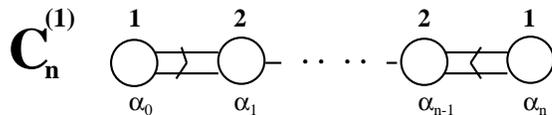


Figura 3.6: Diagrama de Dynkin de $C_n^{(1)}$.

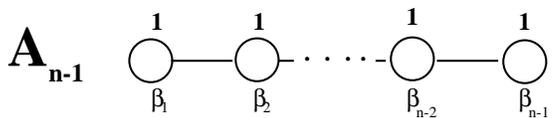


Figura 3.7: Diagrama de Dynkin de A_{n-1} .

La gradación que tenemos que elegir es

$$\vec{s} = (1, 0, \dots, 0, 1), \tag{3.2.40}$$

pues sólo eligiendo una gradación de este tipo podemos recuperar el diagrama de Dynkin de \bar{g}_0 a partir del de $\bar{g}^{(r)}$. Como consecuencia de esto, éste es también el único caso en el cual vamos a tener dos pesos máximos, puesto que la gradación correspondiente tiene dos componentes no nulas. Esto hará más complicado su tratamiento.

En este caso $r = 1$ y también podemos observar en el diagrama de Dynkin de $C_n^{(1)}$ que las raíces $\vec{\alpha}_0$ y $\vec{\alpha}_n$ son las raíces largas, cuya longitud es doble a la del resto. Por tanto, la longitud de las raíces de A_{n-1} será igual a la de las raíces cortas de $C_n^{(1)}$. Como queremos que dicha longitud sea 2, tenemos que el cuadrado de las raíces largas de $C_n^{(1)}$ tiene que ser 4, es decir que $\Psi_g^2/\Psi_{g_0}^2 = 2$, al igual que en el primer ejemplo.

De acuerdo con la gradación (3.2.40) tenemos dos pesos máximos; $\vec{\Lambda}_1 = -\vec{\alpha}_0$ y $\vec{\Lambda}_2 = -\vec{\alpha}_n$.

La condición (3.2.26) ya no es suficiente para determinar ambos pesos, pero nos da una ligadura entre ellos

$$\vec{\Lambda}_1 = -\vec{\Lambda}_2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\alpha}_i, \tag{3.2.41}$$

o bien, en términos de las raíces de A_{n-1} ,

$$\vec{\Lambda}_1 = -\vec{\Lambda}_2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\beta}_i. \tag{3.2.42}$$

La forma de la raíz larga de A_{n-1} es

$$\vec{\theta}_{A_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \vec{\beta}_i, \quad (3.2.43)$$

y, por lo tanto

$$\vec{\Lambda}_1 = \vec{\alpha}_n + 2\vec{\theta}_{A_{n-1}}, \quad \vec{\Lambda}_2 = \vec{\alpha}_0 + 2\vec{\theta}_{A_{n-1}}. \quad (3.2.44)$$

Nos encontramos entonces en un caso en el cual no tenemos sólo un peso máximo sino dos, es decir, tenemos dos representaciones irreducibles cuya suma directa nos da la representación de \bar{g}_0 generada por $[\bar{g}_0, \bar{g}_1] \subset \bar{g}_1$, asociadas a los pesos máximos $\vec{\Lambda}_1$ y $\vec{\Lambda}_2$:

$$\bar{g}_1 \equiv L(\vec{\Lambda}_1 = -\vec{\alpha}_0) \oplus L(\vec{\Lambda}_2 = -\vec{\alpha}_n). \quad (3.2.45)$$

De acuerdo con [31], es posible demostrar que cuando se considera la forma real compacta g entonces la representación de g_0 dada por g_1 mediante la relación $[g_0, g_1] \subset g_1$ es irreducible. Esta propiedad es además general para todos los modelos SSSG.

Por otra parte, las dos representaciones que se presentan en (3.2.45) no son realmente independientes sino que es posible demostrar que una es la compleja conjugada de la otra y, por esta razón, puede demostrarse también que cuando se considera el álgebra compacta ambas representaciones son equivalentes y por lo tanto $[g_0, g_1] \subset g_1$ es irreducible, como esperábamos de acuerdo con el párrafo anterior. El argumento de esta demostración es el que sigue:

Sabemos que $L(\vec{\Lambda}_1)$ es una representación irreducible de \bar{g}_0 , con peso máximo $-\vec{\alpha}_0$, por lo tanto podemos definir el estado de peso máximo como:

$$|\Lambda_{max}^{(1)}\rangle = E_{-\alpha_0}. \quad (3.2.46)$$

Por otra parte, la aplicación sucesiva de operadores paso E_{α_i} , hace posible construir, partiendo de $E_{-\alpha_0}$ el estado E_{α_n} , es decir:

$$\begin{aligned} & [E_{-\alpha_1}, [E_{-\alpha_1}, [E_{-\alpha_2}, [E_{-\alpha_2}, \dots, [E_{-\alpha_{n-1}}, [E_{-\alpha_{n-1}}, E_{-\alpha_0}]]]] \dots]] = \\ & = C(\vec{\alpha}_i) E_{-\alpha_0 - 2 \sum_i \alpha_i} = C(\vec{\alpha}_i) E_{\alpha_n} = C(\vec{\alpha}_i) E_{-\alpha_n}^\dagger, \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

donde $C(\vec{\alpha}_i)$ es una función de las raíces $\vec{\alpha}_i$ y el orden en que se realicen los conmutadores es irrelevante en lo que se refiere a las conclusiones que vamos a extraer. Esta relación significa que los pesos $-\vec{\alpha}_0$ y $\vec{\alpha}_n$ se corresponden con estados contenidos en la misma representación $L(\vec{\Lambda}_1)$ de \bar{g}_0 . Además, podemos decir que el estado E_{α_n} es el estado de peso “mínimo”, en el sentido de que el operador paso E_{α_n} es el operador más “bajo” al que podemos llegar mediante la aplicación sucesiva de los operadores paso asociados al grupo A_{n-1} al estado de peso máximo $E_{-\alpha_0}$. Es decir, podemos definir:

$$|\Lambda_{min}^{(1)}\rangle = E_{\alpha_n} = E_{-\alpha_n}^\dagger. \quad (3.2.48)$$

Pero, por otra parte $E_{-\alpha_n}$ es el estado de peso máximo de la representación irreducible $L(\vec{\Lambda}_2)$,

$$|\Lambda_{max}^{(2)}\rangle = E_{-\alpha_n}, \quad (3.2.49)$$

por lo tanto,

$$|\Lambda_{min}^{(1)}\rangle = |\Lambda_{max}^{(2)}\rangle^\dagger, \quad (3.2.50)$$

es decir, las representaciones $L(\vec{\Lambda}_1)$ y $L(\vec{\Lambda}_2)$ son complejas conjugadas, como queríamos comprobar.

Debido a esta relación entre las dos representaciones esperamos, y vamos a comprobarlo, que los resultados que obtengamos sean los mismos calculados en una u otra representación.

Finalmente, y como hicimos en los dos ejemplos anteriores, esperamos dar una expresión para estos pesos en términos de la base ortonormal para las raíces de A_{n-1} que se presenta en el apéndice C.

Sólo debemos recordar que las raíces de A_{n-1} deben de estar normalizadas a 2 y las raíces largas de $C_n^{(1)}$ deben estarlo a 4. También es necesario que construyamos para $u(1)$ un vector \vec{v} tal que sea ortogonal a cualquier raíz de A_{n-1} y esté normalizado a la unidad.

Este vector tiene la forma

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i, \quad (3.2.51)$$

y satisface por su propia construcción las condiciones:

$$(\vec{v}|\vec{\alpha}_i) = 0 \quad \forall i, \quad \vec{\alpha}_i \in \Delta_{A_{n-1}}, \quad (3.2.52)$$

$$(\vec{v}|\vec{v}) = 1, \quad (3.2.53)$$

donde $\Delta_{A_{n-1}}$ representa el conjunto de raíces de A_{n-1} .

Como sucedía en el ejemplo anterior, los pesos van a descomponerse en suma de dos contribuciones, una procedente de A_{n-1} y otra de la subálgebra $u(1)$, y estas contribuciones tendrán que ser ciertas combinaciones lineales de las raíces de cada una de estas subálgebras, es decir

$$\vec{\Lambda}_{(1,2)} = \vec{\lambda}_{A_{n-1}}^{(1,2)} + \vec{\lambda}_{u(1)}^{(1,2)} \quad \text{y} \quad (\vec{\lambda}_{A_{n-1}}^{(1,2)}|\vec{\lambda}_{u(1)}^{(1,2)}) = 0, \quad (3.2.54)$$

con

$$\vec{\lambda}_{A_{n-1}}^{(1,2)} = \sum_{i=1}^n a_i^{(1,2)} \vec{\alpha}_i, \quad \vec{\lambda}_{u(1)}^{(1,2)} = a^{(1,2)} \vec{v}, \quad (3.2.55)$$

donde los coeficientes $a_i^{(1,2)}$ y $a^{(1,2)}$ están por determinar.

Para determinar estos coeficientes utilizaremos las relaciones (3.2.44), expresadas en términos de la base ortonormal del apéndice C

$$\vec{\Lambda}_1 = 2(\vec{v}_1 - \vec{v}_n) + 2\vec{v}_n = 2\vec{v}_1, \quad (3.2.56)$$

$$\vec{\Lambda}_2 = 2(\vec{v}_1 - \vec{v}_n) - 2\vec{v}_1 = -2\vec{v}_n. \quad (3.2.57)$$

Por otra parte

$$\vec{\Lambda}_1 = 2\vec{v}_1 = \vec{\lambda}_{A_{n-1}}^{(1)} + a^{(1)} \vec{v}, \quad (3.2.58)$$

multiplicando ambos miembros de la ecuación por \vec{v}

$$(\vec{\Lambda}_1|\vec{v}) = (\vec{\lambda}_{A_{n-1}}^{(1)}|\vec{v}) + a^{(1)}(\vec{v}|\vec{v}) \Rightarrow (\vec{\Lambda}_1|\vec{v}) = a^{(1)}(\vec{v}|\vec{v}), \quad (3.2.59)$$

despejando

$$a^{(1)} = \frac{(\vec{\Lambda}_1 | \vec{v})}{(\vec{v} | \vec{v})} = \frac{(2\vec{v}_1 | \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i)}{1} = \frac{2}{\sqrt{n}} = q_{\vec{\Lambda}_1}. \quad (3.2.60)$$

Procediendo análogamente para $\vec{\Lambda}_2$ obtenemos

$$a^{(2)} = -\frac{2}{\sqrt{n}} = q_{\vec{\Lambda}_2}. \quad (3.2.61)$$

Estas constantes $a^{(1)}$, $a^{(2)}$ son las cargas $u(1)$, cuyo cuadrado nos dará el casimir asociado a la subálgebra $u(1)$, que es el mismo para ambas representaciones, como esperábamos.

La obtención de los coeficientes $a_i^{(1,2)}$ es un poco más complicada. Partimos de nuevo de la ecuación

$$2\vec{v}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i^{(1)} \vec{v}_i + \frac{2}{n} \sum_{i=1} \vec{v}_i, \quad (3.2.62)$$

y la idea consiste en ir proyectando esta ecuación con respecto a cada uno de los vectores \vec{v}_i . Por ejemplo, tomando componentes en \vec{v}_1 obtenemos

$$2 = a_1^{(1)} + \frac{2}{n} \Rightarrow a_1^{(1)} = \frac{2(n-1)}{n}. \quad (3.2.63)$$

Si seguimos este procedimiento para $\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$, obtenemos las ecuaciones

$$\frac{2}{n} = a_i^{(1)} - a_{i+1}^{(1)}, \quad \text{para } i = 2, \dots, n-2, \quad (3.2.64)$$

y

$$\frac{2}{n} = a_{n-1}^{(1)}, \quad (3.2.65)$$

cuya solución nos da finalmente

$$a_i^{(1)} = \frac{2(n-i)}{n}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.2.66)$$

Procediendo de modo similar para $\vec{\Lambda}_2$ obtenemos

$$a_i^{(2)} = \frac{2i}{n}, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (3.2.67)$$

Por lo tanto, podemos finalmente escribir

$$\vec{\Lambda}_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2(n-i)}{n} (\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}) + \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i, \quad (3.2.68)$$

$$\vec{\Lambda}_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n} (\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}) - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \quad (3.2.69)$$

Siguiendo este procedimiento para cada uno de los espacios simétricos que aparecen en la tabla (2.2) y utilizando los diagramas de Dynkin que se presentan en el apéndice D, obtenemos los resultados que se presentan en la tabla siguiente:

Tipo $[A_1]$	$SO(2n+1)/SO(n+1) \times SO(n)$, $SO(4n)/SO(2n) \times SO(2n)$, $E_7/SU(8)$, $E_8/SO(16)$, $F_4/Sp(3) \times SU(2)$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$.
Tipo $[A_2]$	$SU(n)/SO(n)$, $SO(4n+2)/SO(2n+1) \times SO(2n+1)$, $E_6/Sp(4)$.
Tipo $[B]$	$Sp(n)/U(n)$.

Tabla 3.1: Modelos split de tipo $[A_1]$, $[A_2]$ y $[B]$.

3.2.2 Dimensión conforme de la perturbación.

En esta sección nos ocuparemos de explicar cómo se pueden obtener las dimensiones conformes de los campos que actúan como perturbación en cada uno de estos modelos utilizando los resultados que se presentan en [7].

De acuerdo con [7], si $g_0 = g_0^{(1)} \oplus \dots \oplus g_0^{(n)}$, la dimensión conforme de la perturbación tendrá la forma

$$\Delta_\Phi = \sum_{i=1}^n \frac{C_{g_0^{(i)}}}{2(k_{g_0^{(i)}} + h_{g_0^{(i)}}^\vee)} = \sum_{i=1}^n \Delta_{g_0^{(i)}}, \quad (3.2.70)$$

donde $C_{g_0^{(i)}}$ es el casimir de la representación asociada al álgebra $g_0^{(i)}$, $k_{g_0^{(i)}}$ es el nivel de dicha representación y $h_{g_0^{(i)}}^\vee$ es el número de coxeter dual de $g_0^{(i)}$.

Debemos tener en cuenta que cuando g_0 es semisimple, su representación es equivalente al producto tensorial de las representaciones asociadas a sus ideales simples, mientras que, cuando es de la forma, $g_0 = g_0^{(1)} \oplus u(1)$, con $g_0^{(1)}$ simple, su representación es suma directa de representaciones irreducibles de $g_0^{(1)}$ cargadas con respecto a $u(1)$.

Los casimires, $C_{g_0^{(i)}}$ pueden expresarse en términos de cantidades conocidas como⁵

$$C_{g_0^{(i)}} = (\vec{\Lambda}_{g_0^{(i)}} | \vec{\Lambda}_{g_0^{(i)}} + 2\vec{\delta}_{g_0^{(i)}}) \quad (3.2.71)$$

donde, $\vec{\Lambda}_{g_0^{(i)}}$ es el peso máximo de la representación de $g_0^{(i)}$ y $\vec{\delta}_{g_0^{(i)}}$ es la semisuma de las raíces positivas de $g_0^{(i)}$.

Recordemos que los valores de los números de coxeter duales son, para las álgebras de Lie finitas, simples y complejas, los siguientes:

⁵Esta expresión se obtiene sin más que tener en cuenta la definición de casimir, $C_g \cdot I = t^a t^a$, haciendo actuar este operador sobre el estado de peso máximo y considerando los generadores t^a de la base compacta.

\bar{g}	$A_l = su(l+1)$	$B_l = so(2l+1)$	$C_l = sp(l)$	$D_l = so(2l)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
h_g^\vee	$l+1$	$2l-1 (l \geq 2)$	$l+1$	$2l-2 (l \geq 2)$	12	18	30	9	4

Tabla 3.2: Valores de h_g^\vee para álgebras de Lie afines finitas.

Teniendo en cuenta la definición del número de coxeter dual y los isomorfismos entre álgebras de Lie, $su(2) \approx so(3) \approx sp(1)$ y $so(2) \approx u(1)$, podemos deducir que los restantes valores de h_g^\vee son:

$$h_{so(3),su(2),sp(1)}^\vee = 2, \quad h_{so(2),u(1)}^\vee = 0. \quad (3.2.72)$$

De este modo podemos ya pasar a tratar algunos ejemplos concretos, que serán los mismos que hemos considerado en la sección anterior:

1. $G/G_0 = SU(2n)/SO(2n)$, con $n > 2$.

En este caso g_0 es simple, así que tenemos una única contribución a la dimensión conforme y un único casimir que calcular. Para obtener el valor de dicho casimir necesitamos, como indica la expresión (3.2.71), obtener primero la suma de raíces positivas de $so(2n)$ que, consultado el apéndice C, da como resultado

$$2\vec{\delta}^{so(2n)} = 2 \sum_{i=1}^n (n-i)\vec{v}_i. \quad (3.2.73)$$

Por otra parte, ya sabemos de la sección anterior que

$$\vec{\Lambda}_{so(2n)} = 2\vec{v}_1, \quad (3.2.74)$$

y, por lo tanto

$$C_{so(2n)} = (2\vec{v}_1 | 2\vec{v}_1 + 2 \sum_{i=1}^n (n-i)\vec{v}_i) = 4n. \quad (3.2.75)$$

De este modo, sustituyendo el valor del número de coxeter dual, la dimensión conforme de la perturbación es

$$\Delta_\Phi = \frac{C_{so(2n)}}{2(k + h_{g_0}^\vee)} = \frac{2n}{k + 2(n-1)}. \quad (3.2.76)$$

Esta dimensión conforme coincide con

$$\Delta_\Phi = \frac{h_g^\vee}{k + h_{g_0}^\vee}, \quad (3.2.77)$$

en concordancia con el resultado (4.3.48) que se obtendrá en el capítulo siguiente a partir del cálculo explícito de la OPE del campo primario $\Phi(w, \bar{w})$ con el tensor energía-momento.

2. $G/G_0 = SO(4n + 1)/SO(2n) \times SO(2n + 1)$, con $n > 1$.

En este caso g_0 se descompone en dos subálgebras simples, de modo que la dimensión conforme será la suma de dos contribuciones.

Primeramente tenemos que obtener los valores de los casimires asociados a cada subálgebra. Tomaremos $g_0^{(1)} = so(2n)$ y $g_0^{(2)} = so(2n + 1)$. Teniendo en cuenta el resultado (3.2.39), $\vec{\Lambda}_{so(2n)} = \vec{v}_1^{so(2n)}$ y $\vec{\Lambda}_{so(2n+1)} = \vec{v}_1^{so(2n+1)}$.

Por otra parte, la suma de las raíces positivas da como resultado:

$$2\vec{\delta}^{so(2n)} = 2 \sum_{i=1}^n (n - i) \vec{v}_i^{so(2n)}, \quad (3.2.78)$$

$$2\vec{\delta}^{so(2n+1)} = \sum_{i=1}^n (2(n - i) + 1) \vec{v}_i^{so(2n+1)}. \quad (3.2.79)$$

Con estos datos podemos ya obtener los casimires

$$C_{so(2n)} = (\vec{v}_1^{so(2n)} | \vec{v}_1^{so(2n)} + 2\vec{\delta}^{so(2n)}) = 2n - 1, \quad (3.2.80)$$

$$C_{so(2n+1)} = (\vec{v}_1^{so(2n+1)} | \vec{v}_1^{so(2n+1)} + 2\vec{\delta}^{so(2n+1)}) = 2n. \quad (3.2.81)$$

Por lo tanto, sustituyendo ya los valores de $h_{so(2n)}^\vee$ y $h_{so(2n+1)}^\vee$, obtenemos

$$\Delta_{so(2n)} = \frac{2n - 1}{2(k + 2n - 2)}, \quad (3.2.82)$$

$$\Delta_{so(2n+1)} = \frac{2n}{2(k + 2n - 1)}. \quad (3.2.83)$$

La dimensión conforme de la perturbación es entonces,

$$\Delta_\Phi = \Delta_{so(2n)} + \Delta_{so(2n+1)}. \quad (3.2.84)$$

3. $G/G_0 = Sp(n)/U(n) = Sp(n)/U(1) \times SU(n)$, con $n > 1$.

En este caso g_0 se descompone en una subálgebra semisimple y una subálgebra $u(1)$. Cada una de estas subálgebras dará su contribución a la dimensión conforme.

Recordemos que en la sección (3.2.1) hemos demostrado que, en este caso, la representación de \bar{g}_0 dada por \bar{g}_1 mediante la relación $[\bar{g}_0, \bar{g}_1] \subset \bar{g}_1$ es reducible y se expresa como suma directa de dos representaciones irreducibles de pesos máximos $\vec{\Lambda}_1 = -\vec{\alpha}_0$ y $\vec{\Lambda}_2 = -\vec{\alpha}_n$, siendo una compleja conjugada de la otra.

Por esta razón, cuando se considera la forma real compacta g , para la cual g_0 admite igualmente una representación dada por g_1 , esta representación es ahora irreducible puesto que, al ir al álgebra compacta las dos representaciones del álgebra compleja \bar{g}_0 de las que hablábamos en el párrafo anterior son realmente equivalentes. Por eso, la dimensión conforme obtenida utilizando una u otra de las representaciones debe ser la misma.

Para obtener el casimir asociado a la subálgebra $su(n) = A_{n-1}$ necesitamos conocer la suma de sus raíces positivas

$$2\vec{\delta}^{su(n)} = \sum_{i=1}^{[n/2]} (\vec{v}_i^{su(n)} - \vec{v}_{n+1-i}^{su(n)})(n+1-2i), \quad (3.2.85)$$

donde $[n/2]$ indica la parte entera de $n/2$, es decir:

$$[n/2] = \begin{cases} n/2 & \text{para } n \text{ par.} \\ (n-1)/2 & \text{par } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Podemos pasar ya a calcular el casimir correspondiente a la subálgebra $su(n)$. Empecemos con la representación correspondiente al peso $\vec{\Lambda}_1$.

Para esta representación sabemos que

$$\vec{\Lambda}_1 = \vec{\lambda}_{su(n)}^{(1)} + \vec{\lambda}_{u(1)}^{(1)}, \quad (3.2.86)$$

donde,

$$\vec{\lambda}_{su(n)}^{(1)} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)(\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}), \quad \vec{\lambda}_{u(1)}^{(1)} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \quad (3.2.87)$$

Por lo tanto, el casimir sería

$$C_{su(n)}^{(1)} = (\vec{\lambda}_{su(n)}^{(1)} | \vec{\lambda}_{su(n)}^{(1)} + 2\vec{\delta}^{su(n)}) = \frac{2(n-1)(n+2)}{n}. \quad (3.2.88)$$

Obtengamos ahora el casimir para la representación asociada al peso máximo $\vec{\Lambda}_2$. En este caso,

$$\vec{\Lambda}_2 = \vec{\lambda}_{su(n)}^{(2)} + \vec{\lambda}_{u(1)}^{(2)}, \quad (3.2.89)$$

donde,

$$\vec{\lambda}_{su(n)}^{(2)} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} i(\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}), \quad \vec{\lambda}_{u(1)}^{(2)} = -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \vec{v}_i. \quad (3.2.90)$$

Por lo tanto, el casimir en este caso sería

$$C_{su(n)}^{(2)} = (\vec{\lambda}_{su(n)}^{(2)} | \vec{\lambda}_{su(n)}^{(2)} + 2\vec{\delta}^{su(n)}) = \frac{2(n-1)(n+2)}{n}. \quad (3.2.91)$$

Como esperábamos, los casimires coinciden porque ambas representaciones son equivalentes.

Ahora obtengamos la contribución de $u(1)$. El casimir es muy sencillo de obtener en este caso, puesto que no es más que el cuadrado de la carga $u(1)$ asociada a cada representación que ya obtuvimos antes, es decir:

$$C_{u(1)}^{(1,2)} = (\vec{\lambda}_{u(1)}^{(1,2)} | \vec{\lambda}_{u(1)}^{(1,2)}) = \frac{4}{n} = (q_{\Lambda}^{(1,2)})^2, \quad (3.2.92)$$

y que, evidentemente coincide para ambas representaciones puesto que las cargas son iguales y de signo opuesto.

De este modo podemos ya escribir que, para cualquiera de las dos representaciones, las contribuciones a la dimensión conforme de la perturbación son

$$\Delta_{su(n)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(k+n)}, \quad (3.2.93)$$

$$\Delta_{u(1)} = \frac{2}{kn}, \quad (3.2.94)$$

donde hemos sustituido ya el valor de los números de coxeter dual (0 para $u(1)$). Por lo tanto:

$$\Delta_{\Phi} = \Delta_{su(n)} + \Delta_{u(1)}. \quad (3.2.95)$$

Esperamos que estos tres ejemplos hayan resultado suficientemente representativos del procedimiento general que hemos seguido para la obtención de la dimensión conforme de la perturbación para cada uno de los modelos split de la tabla (2.2).

A continuación se presenta un conjunto de tablas donde, de forma detallada, se dan las características de cada uno de estos modelos: el tipo de modelo ($[A_1]$, $[A_2]$ ó $[B]$), las dimensiones conformes de las perturbaciones, los casimires asociados a cada subálgebra simple de g_0 , los cocientes $\Psi_g^2/\Psi_{g_0^{(i)}}^2$, las gradaciones \vec{s} y pesos máximos y , finalmente, las cotas que sobre los valores del nivel k impone en cada caso la condición de super-renormalizabilidad a primer orden ($\Delta_{\Phi} < 1/2$), que obtendremos en el siguiente capítulo.

Algunos de los espacios simétricos se han marcado con un (*) para indicar que se describen separadamente por ser diferentes a los correspondientes casos generales tanto sus diagramas de Dynkin como los números de coxeter duales asociados.

Los isomorfismos $B_2^{(1)} \approx C_2^{(1)}$ y $A_3^{(2)} \approx D_3^{(2)}$ son consecuencia de los isomorfismos $so(5) \approx sp(2)$ y $su(4) \approx so(6)$ y son útiles porque nos permiten utilizar el diagrama de Dynkin de $C_2^{(1)}$, incluido en el apéndice E como diagrama de $B_2^{(1)}$, el cual no está incluido en esta lista. Lo mismo sucede entre $D_3^{(2)}$ y $A_3^{(2)}$. También son isomorfas las álgebras $su(2) \approx so(3) \approx sp(1)$.

Por otra parte, en las tablas (3.5) y (3.6) se presentan, en lugar de los casimires, lo que hemos llamado casimires reducidos, que se definen como:

$$\tilde{C}_{g_0^{(i)}} = \left(\frac{\Psi_{g_0^{(i)}}}{\Psi_g} \right)^2 C_{g_0^{(i)}}. \quad (3.2.96)$$

En estas tablas no se presentan los datos correspondientes al modelo de sine-Gordon $SU(2)/SO(2)$, debido a que, en este caso el grupo $G_0 = SO(2)$ es abeliano, por lo tanto, la acción que caracteriza a este modelo no es la acción de WZW perturbada sino una perturbación de una teoría de bosones libres. Por ello, la constante de acoplamiento no está cuantizada a nivel cuántico y la dimensión conforme no puede obtenerse utilizando la misma técnica que para los restantes espacios simétricos.

Espacio simétrico	Tipo	Δ_{Φ}	$\Delta_{\Phi} < 1/2$
$\frac{SU(2n)}{SO(2n)}, (n \geq 3)$ $\bar{g}^{(r)} = A_{2n-1}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_n$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = \frac{2n}{k+2n-2}$	$k > 2(1+n)$
$\frac{SU(2n+1)}{SO(2n+1)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = A_{2n}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_n$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = \frac{2n+1}{k+2n-1}$	$k > 2(n+1) + 1$
$\frac{SU(4)^{(*)}}{SO(4)}$ $\bar{g}^{(r)} = A_3^{(2)} \approx D_3^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_2$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = \frac{4}{k+2}$	$k > 6$
$\frac{SU(3)^{(*)}}{SO(3)}$ $\bar{g}^{(r)} = A_2^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_1$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = \frac{6}{k+2}$	$k > 10$
$\frac{SO(4n)}{SO(2n) \times SO(2n)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = D_{2n}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_n \oplus D_n$	$[A_1]$	$\Delta_{\Phi} = 2\Delta_{so(2n)}$ $\Delta_{so(2n)} = \frac{2n-1}{2(k+2(n-1))}$	$k > 2n$
$\frac{SO(4n+2)}{SO(2n+1) \times SO(2n+1)}, (n \geq 1)$ $\bar{g}^{(r)} = D_{2n+1}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_n \oplus B_n$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = 2\Delta_{so(2n+1)}$ $\Delta_{so(2n+1)} = \frac{2n}{2(k+2n-1)}$	$k > 2n + 1$
$\frac{SO(4n+1)}{SO(2n) \times SO(2n+1)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = B_{2n}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_n \oplus B_n$	$[A_1]$	$\Delta_{\Phi} = \Delta_{so(2n)} + \Delta_{so(2n+1)}$	$k > 1 + \sqrt{2n(2n-1)}$
$\frac{SO(4n+3)}{SO(2n+1) \times SO(2n+2)}, (n \geq 1)$ $\bar{g}^{(r)} = B_{2n+1}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = B_n \oplus D_{n+1}$	$[A_1]$	$\Delta_{\Phi} = \Delta_{so(2n+1)} + \Delta_{so(2n+2)}$	$k > 1 + \sqrt{2n(2n+1)}$
$\frac{SO(4)^{(*)}}{SO(2) \times SO(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = D_2^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_1 \oplus D_1$	$[A_2]$	$\Delta_{\Phi} = 2\Delta_{so(2)}$ $\Delta_{so(2)} = \frac{1}{k}$	$k > 7$
$\frac{SO(5)^{(*)}}{SO(2) \times SO(3)}$ $\bar{g}^{(r)} = B_2^{(1)} \approx C_2^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_1 \oplus B_1$	$[A_1]$	$\Delta_{\Phi} = \Delta_{so(2)} + \Delta_{so(3)}$ $\Delta_{so(2)} = \frac{1}{k}$ $\Delta_{so(3)} = \frac{1}{k+2}$	$k > 3$

Tabla 3.3: Tipo de modelo, dimensión conforme de la perturbación y condición de super-renormalizabilidad de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $SU(n)/SO(n)$ y $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$.

Espacio simétrico	Tipo	Δ_Φ	$\Delta_\Phi < 1/2$
$\frac{E_6}{Sp(4)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_6^{(2)}$ $\bar{g}_0 = C_4$	$[A_2]$	$\Delta_\Phi = \frac{6}{k+5}$	$k > 7$
$\frac{E_7}{SU(8)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_7^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_7$	$[A_1]$	$\Delta_\Phi = \frac{9}{k+8}$	$k > 10$
$\frac{E_8}{SO(16)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_8^{(1)}$, $\bar{g}_0 = D_8$	$[A_1]$	$\Delta_\Phi = \frac{15}{k+14}$	$k > 16$
$\frac{F_4}{Sp(3) \times SU(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = F_4^{(1)}$ $\bar{g}_0 = C_3 \oplus A_1$	$[A_1]$	$\Delta_\Phi = \Delta_{sp(3)} + \Delta_{su(2)}$ $\Delta_{sp(3)} = \frac{15}{4(k+4)}$ $\Delta_{su(2)} = \frac{3}{4(k+2)}$	$k \geq 6$
$\frac{G_2}{SU(2) \times SU(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = G_2^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_1 \oplus A_1$	$[A_1]$	$\Delta_\Phi = \Delta_{su(2)_1} + \Delta_{su(2)_2}$ $\Delta_{su(2)_1} = \frac{3}{4(k+2)}$ $\Delta_{su(2)_2} = \frac{15}{4(3k+2)}$	$k \geq 3$
$\frac{Sp(n)}{SU(n) \times U(1)}$ $\bar{g}^{(r)} = C_n^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_{n-1} \oplus u(1)$	$[B]$	$\Delta_\Phi = \Delta_{su(n)} + \Delta_{u(1)}$ $\Delta_{su(n)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(k+n)}$ $\Delta_{u(1)} = \frac{2}{kn}$	$k > \frac{1}{2}(2 + n + \sqrt{20 + n(4 + n)})$

Tabla 3.4: Tipo de modelo, dimensión conforme de la perturbación y condición de superrenormalizabilidad de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $E_6/Sp(4)$, $E_7/SU(8)$, $E_8/SO(16)$, $F_4/Sp(3) \times SU(2)$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$ y $Sp(n)/SU(n) \times U(1)$.

Espacio simétrico	$\tilde{C}_{g_0^{(i)}}$ $\vec{\Lambda}$	\vec{s} $\left(\frac{\Psi_g}{\Psi_{g_0^{(i)}}}\right)^2$
$\frac{SU(2n)}{SO(2n)}, (n \geq 3)$ $\bar{g}^{(r)} = A_{2n-1}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_n$	$\tilde{C}_{so(2n)} = 2n$ $\vec{\Lambda} = 2\vec{v}_1$	$\vec{s} = (0, \dots, 0, 1)$ $\frac{\Psi_{su(2n)}^2}{\Psi_{so(2n)}^2} = 2$
$\frac{SU(2n+1)}{SO(2n+1)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = A_{2n}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_n$	$\tilde{C}_{so(2n+1)} = 2n + 1$ $\vec{\Lambda} = 2\vec{v}_1$	$\vec{s} = (0, \dots, 0, 1)$ $\frac{\Psi_{su(2n+1)}^2}{\Psi_{so(2n+1)}^2} = 2$
$\frac{SU(4)^{(*)}}{SO(4)}$ $\bar{g}^{(r)} = A_3^{(2)} \approx D_3^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_2$	$\tilde{C}_{so(4)} = 4$ $\vec{\Lambda} = 2\vec{v}_1$	$\vec{s} = (0, 1, 0)$ $\frac{\Psi_{su(4)}^2}{\Psi_{so(4)}^2} = 2$
$\frac{SU(3)^{(*)}}{SO(3)}$ $\bar{g}^{(r)} = A_2^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_1$	$\tilde{C}_{so(3)} = 3$ $\vec{\Lambda} = 2\vec{v}_1$	$\vec{s} = (0, 1)$ $\frac{\Psi_{su(3)}^2}{\Psi_{so(3)}^2} = 4$
$\frac{SO(4n)}{SO(2n) \times SO(2n)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = D_{2n}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_n \oplus D_n$	$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2n)} + \vec{v}_1^{so(2n)}$	$\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0), s_n = 1$ $\frac{\Psi_{so(4n)}^2}{\Psi_{so(2n)}^2} = 1$
$\frac{SO(4n+2)}{SO(2n+1) \times SO(2n+1)}, (n \geq 1)$ $\bar{g}^{(r)} = D_{2n+1}^{(2)}$ $\bar{g}_0 = B_n \oplus B_n$	$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2n+1)} + \vec{v}_1^{so(2n+1)}$	$\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0), s_n = 1$ $\frac{\Psi_{so(4n+2)}^2}{\Psi_{so(2n+1)}^2} = 1$
$\frac{SO(4n+1)}{SO(2n) \times SO(2n+1)}, (n \geq 2)$ $\bar{g}^{(r)} = B_{2n}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_n + B_n$	$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2n)} + \vec{v}_1^{so(2n+1)}$	$\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0), s_n = 1$ $\frac{\Psi_{so(4n+1)}^2}{\Psi_{so(2n)}^2} = \frac{\Psi_{so(4n+1)}^2}{\Psi_{so(2n+1)}^2} = 1$
$\frac{SO(4n+3)}{SO(2n+1) \times SO(2n+2)}, (n \geq 1)$ $\bar{g}^{(r)} = B_{2n+1}^{(1)}$ $\bar{g}_0 = B_n \oplus D_{n+1}$	$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2n+1)} + \vec{v}_1^{so(2n+2)}$	$\vec{s} = (0, \dots, 1, \dots, 0), s_{n+1} = 1$ $\frac{\Psi_{so(4n+3)}^2}{\Psi_{so(2n+1)}^2} = \frac{\Psi_{so(4n+3)}^2}{\Psi_{so(2n+2)}^2} = 1$
$\frac{SO(4)^{(*)}}{SO(2) \times SO(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = D_2^{(2)}$ $\bar{g}_0 = D_1 \oplus D_1$	$\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2)} + \vec{v}_1^{so(2)}$	$\vec{s} = (0, 1, 0)$ $\frac{\Psi_{so(4)}^2}{\Psi_{so(2)}^2} = 2$
$\frac{SO(5)^{(*)}}{SO(2) \times SO(3)}$ $\bar{g}^{(r)} = B_2^{(1)} \approx C_2^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_1 \oplus B_1$	$\tilde{C}_{so(3)} = 2$ $\vec{\Lambda} = \vec{v}_1^{so(2)} + \vec{v}_1^{so(3)}$	$\vec{s} = (0, 1, 0)$ $\frac{\Psi_{so(5)}^2}{\Psi_{so(2)}^2} = \frac{\Psi_{so(5)}^2}{\Psi_{so(3)}^2} = 1$

Tabla 3.5: Casimir reducido, gradación, peso máximo de la representación y relación entre las longitudes de las raíces largas de \bar{g} y \bar{g}_0 de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $SU(n)/SO(n)$ y $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$.

Espacio simétrico	$\tilde{C}_{g_0^{(i)}}$ $\vec{\Lambda}$	\vec{s} $\left(\frac{\Psi_{g_0^{(i)}}}{\Psi_{g_0^{(i)}}}\right)^2$
$\frac{E_6}{Sp(4)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_6^{(2)}$ $\bar{g}_0 = C_4$	$\tilde{C}_{sp(4)} = 12$ $\vec{\Lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^4 \vec{v}_i$	$\vec{s} = (0, 0, 0, 0, 1)$ $\frac{\Psi_{E_6}^2}{\Psi_{sp(4)}^2} = 1$
$\frac{E_7}{SU(8)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_7^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_7$	$\tilde{C}_{su(8)} = 18$ $\vec{\Lambda} = \frac{1}{2}(\sum_{i=1}^4 \vec{v}_i - \sum_{i=5}^8 \vec{v}_i)$	$\vec{s} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ $\frac{\Psi_{E_7}^2}{\Psi_{su(8)}^2} = 1$
$\frac{E_8}{SO(16)}$ $\bar{g}^{(r)} = E_8^{(1)}$ $\bar{g}_0 = D_8$	$\tilde{C}_{so(16)} = 30$ $\vec{\Lambda} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^8 \vec{v}_i$	$\vec{s} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ $\frac{\Psi_{E_8}^2}{\Psi_{so(16)}^2} = 1$
$\frac{F_4}{Sp(3) \times SU(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = F_4^{(1)}$ $\bar{g}_0 = C_3 \oplus A_1$	$\tilde{C}_{sp(3)} = \frac{15}{2}$ $\tilde{C}_{su(2)} = \frac{3}{2}$ $\vec{\Lambda} = \sqrt{2} \sum_{i=1}^3 \vec{v}_i^{sp(3)} + (\vec{v}_1^{su(2)} - \vec{v}_2^{su(2)})$	$\vec{s} = (0, 1, 0, 0, 0)$ $\frac{\Psi_{F_4}^2}{\Psi_{sp(3)}^2} = \frac{\Psi_{F_4}^2}{\Psi_{su(2)}^2} = 1$
$\frac{G_2}{SU(2) \times SU(2)}$ $\bar{g}^{(r)} = G_2^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_1 \oplus A_1$	$\tilde{C}_{su(2)_1} = \frac{3}{2}$ $\tilde{C}_{su(2)_2} = \frac{5}{6}$ $\vec{\Lambda} = (\vec{v}_1^{su(2)_1} - \vec{v}_2^{su(2)_2}) + \sqrt{3}(\vec{v}_1^{su(2)_1} - \vec{v}_2^{su(2)_2})$	$\vec{s} = (0, 1, 0)$ $\frac{\Psi_{G_2}^2}{\Psi_{su(2)_1}^2} = 1, \frac{\Psi_{G_2}^2}{\Psi_{su(2)_2}^2} = 3$
$\frac{Sp(n)}{SU(n) \times U(1)}$ $\bar{g}^{(r)} = C_n^{(1)}$ $\bar{g}_0 = A_{n-1} \oplus u(1)$	$\tilde{C}_{su(n)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n}, C_{u(1)} = \frac{4}{n}$ $\vec{\Lambda}_1 = \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} (\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}) + \sum_{i=1}^n \vec{v}_i)$ $\vec{\Lambda}_2 = \frac{2}{n}(\sum_{i=1}^{n-1} i(\vec{v}_i - \vec{v}_{i+1}) - \sum_{i=1}^n \vec{v}_i)$	$\vec{s} = (1, 0, \dots, 0, 1)$ $\frac{\Psi_{sp(n)}^2}{\Psi_{su(n)}^2} = 2$

Tabla 3.6: Casimir reducido, gradación, peso máximo de la representación y relación entre las longitudes de las raíces largas de \bar{g} y \bar{g}_0 de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $E_6/Sp(4)$, $E_7/SU(8)$, $E_8/SO(16)$, $F_4/Sp(3) \times SU(2)$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$ y $Sp(n)/SU(n) \times U(1)$.

Capítulo 4

Cantidades conservadas cuánticamente.

En este capítulo se presenta uno de los resultados más importantes de este trabajo: la demostración de la integrabilidad cuántica de los modelos split. Para ello hemos utilizado el argumento de Parke [13], según el cual, la existencia de dos cargas conservadas de spines mayores que 2 y menores que -2 permite concluir la integrabilidad cuántica de una teoría masiva con matriz-S analítica en 1+1 dimensiones. En nuestro caso hemos comprobado la existencia de cantidades conservadas de spines ± 2 y de dos cantidades conservadas de spines 4 y -4 lo cual nos ha llevado a concluir la integrabilidad cuántica de los modelos split considerados.

Para realizar el cálculo de las cantidades conservadas nos hemos basado fundamentalmente en los resultados presentados por Zamolodchikov en [20] y también en [18] y [19]. En el primero de estos artículos se propone un método que permite calcular las cantidades conservadas cuánticamente en teorías construidas como perturbaciones de Teorías de Campos con simetría Conforme.

En las siguientes secciones presentamos los cálculos que nos han llevado a obtener las cantidades conservadas de spin 2 y una de las cantidades conservadas de spin 4 para los modelos split con G_0 simple. Nótese que, clásicamente, para cada spin existen $rank(G)$ cantidades conservadas.

Previamente a estos cálculos presentamos también un resumen de los argumentos de Zamolodchikov y Parke en los que se ha basado nuestro trabajo.

4.1 Cantidades conservadas en CFT's perturbadas.

4.1.1 Ecuaciones de movimiento en CFT.

La simetría conforme de una CFT está generada por las componentes $T = T_{zz}$ y $\bar{T} = T_{\bar{z}\bar{z}}$ del tensor energía-momento $T^{\mu\nu}$ que es simétrico y de traza nula. Como es habitual, a partir de ahora nos referiremos únicamente a la parte quirral del álgebra conforme, asumiendo que existirán relaciones análogas para la parte antiquiral.

La componente quirral $T(z)$ satisface:

$$\bar{\partial}T = 0, \quad (4.1.1)$$

y esto hace posible definir un conjunto infinito de generadores de Virasoro L_n , con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ actuando en el espacio \mathbf{A} de los campos locales de la CFT de la siguiente forma:

$$L_n A(z, \bar{z}) = \oint_z dw (w - z)^{n+1} T(w) A(z, \bar{z}), \quad (4.1.2)$$

donde $A \in \mathbf{A}$. Estos operadores satisfacen además el álgebra de Virasoro

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12} n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}, \quad (4.1.3)$$

y son los coeficientes de la expansión en modos del operador $T(z)$

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-2} L_n. \quad (4.1.4)$$

El operador identidad \mathbf{I} , es un campo particular de \mathbf{A} que satisface las ecuaciones:

$$L_n \mathbf{I} = 0 \quad \text{para } n \geq -1. \quad (4.1.5)$$

La aplicación de los operadores L_n con $n \leq -2$ a \mathbf{I} produce una serie de campos locales:

$$(L_{-n} \mathbf{I})(z) = \frac{1}{(n-2)!} \partial^{n-2} T(z), \quad (4.1.6)$$

en particular, para $n = 2$, recuperamos el campo $T(z)$.

Los campos obtenidos por aplicación sucesiva de más de un operador L_{-n} , con $n \geq -2$ pueden ser identificados con campos compuestos, construidos a partir de $T(z)$ y de sus derivadas. Podemos construir un subespacio Λ de dimensión infinita generado por estos campos. Este espacio puede descomponerse como

$$\Lambda = \bigoplus_{s=-\infty}^{+\infty} \Lambda_s, \quad (4.1.7)$$

en términos de autoespacios de los operadores L_0 y \bar{L}_0

$$L_0 \Lambda_s = s \Lambda_s, \quad \bar{L}_0 \Lambda_s = 0. \quad (4.1.8)$$

Todos los campos en Λ_s tienen dimensión conforme $(s, 0)$ y, por lo tanto, spin s . Los campos pertenecientes al subespacio Λ son analíticos, es decir, satisfacen :

$$\bar{\partial}\Lambda = 0, \quad (4.1.9)$$

al igual que $T(z)$.

En Λ existen campos que son derivadas totales, como es el caso del propio $T(z)$. Es conveniente eliminar estos campos para nuestro análisis posterior, definiendo un nuevo espacio $\hat{\Lambda} = \Lambda / L_{-1}\Lambda$, que está contenido en Λ y donde $L_{-1}\Lambda$ es el subconjunto de Λ formado por derivadas totales.

Este nuevo espacio $\hat{\Lambda}$ admite también una descomposición del tipo (4.1.7) y los subespacios resultantes, $\hat{\Lambda}_s$ cumplen también las relaciones (4.1.8). Llamaremos I_s a los campos contenidos en $\hat{\Lambda}_s$ y, en términos de éstos, podremos construir un conjunto infinito de integrales del movimiento linealmente independientes en cualquier CFT, de la forma¹:

$$\mathcal{L}_{s,n}A(z, \bar{z}) = \oint_z dw (w - z)^{n+s-1} I_s(w) A(z, \bar{z}). \quad (4.1.10)$$

donde los generadores $\mathcal{L}_{s,n}$ se identifican con los coeficientes de la expansión en modos del campo I_s

$$I_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-s} \mathcal{L}_{s,n}, \quad (4.1.11)$$

del mismo modo que los generadores de Virasoro lo eran para el tensor energía-momento.

Algunas de las integrales de movimiento (4.1.10) sobrevivirán como tal también cuando la teoría es perturbada mediante de un campo primario y serán éstas precisamente las que nos proporcionarán las cantidades conservadas de la teoría perturbada, como veremos en la siguiente sección.

4.1.2 Ecuaciones de movimiento en CFT's perturbadas.

El espacio \mathbf{A} de los campos locales de la CFT se descompone en suma de espacios asociados a representaciones de peso máximo de $V \times \bar{V}$, donde V y \bar{V} representan el álgebra de Virasoro quiral y antiquiral:

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{\alpha} [\Phi_{\alpha}], \quad (4.1.12)$$

donde $[\Phi_{\alpha}]$ es la clase conforme del campo primario Φ_{α} que satisface las ecuaciones:

$$L_n \Phi_{\alpha} = \bar{L}_n \Phi_{\alpha} = 0 \quad \text{para } n > 0, \quad (4.1.13)$$

$$L_0 \Phi_{\alpha} = \Delta_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad \bar{L}_0 \Phi_{\alpha} = \bar{\Delta}_{\alpha} \Phi_{\alpha}, \quad (4.1.14)$$

donde $(\Delta_{\alpha}, \bar{\Delta}_{\alpha})$ son las dimensiones conformes quiral y antiquiral de Φ_{α} . Vamos a considerar siempre que las CFT's que estamos estudiando son unitarias y por lo tanto $\Delta_{\alpha}, \bar{\Delta}_{\alpha} \geq 0$ y sóloamente el operador \mathbf{I} tiene ambas dimensiones conformes nulas. En el caso de campos sin spin $\Delta_{\alpha} = \bar{\Delta}_{\alpha}$. Por otra parte, cuando $\Delta_{\alpha} < 1$ diremos que el campo Φ_{α} es relevante.

Una CFT está asociada a un punto fijo del grupo de renormalización. El espacio formado por el conjunto de campos relevantes de la CFT puede ser interpretado como un espacio tangente tomado justamente en el punto fijo, de manera que una perturbación de la CFT mediante un campo relevante supone un desplazamiento a lo largo de una

¹Aunque vayamos a etiquetar a los campos I_s con un único índice referido al spin, nótese que, para cada valor del spin, existirán generalmente varios campos. Veremos en las siguientes secciones cómo, en nuestro caso, esa multiplicidad se indica dando un carácter vectorial a las densidades conservadas.

dirección de ese espacio tangente que aleja a la teoría del punto fijo inicial [39]. La acción más general para una CFT perturbada por campos relevantes es de la forma:

$$S = S_{CFT} + \sum_r \lambda_r \int \Phi_r(x) d^2x, \quad (4.1.15)$$

donde S_{CFT} es la acción de la CFT no perturbada, $(\Delta_r, \bar{\Delta}_r)$ son las dimensiones del campo Φ_r , λ_r es una constante de acoplamiento con dimensiones $(1 - \Delta_r, 1 - \bar{\Delta}_r)$, y el subíndice r denota el carácter relevante de la perturbación.

En las teorías SSSG que estamos estudiando la perturbación viene dada por un único campo primario relevante de spin nulo ($\Delta_r = \bar{\Delta}_r$) de la CFT original, que en este caso es el modelo WZW, así que vamos a centrarnos en el caso en que todas las constantes de acoplamiento λ_r son nulas excepto una, que llamaremos λ .

Una hipótesis fundamental será que el conjunto de campos conformes de la CFT original proporciona un conjunto completo de campos para describir la CFT perturbada. Como vimos en la sección (2.1.1), en la teoría original tenemos una serie de campos $I_s \in \hat{\Lambda}_s$. Para $\lambda \neq 0$ estos campos ya no satisfarán la relación (4.1.9) sino que su derivada tendrá la siguiente forma general:

$$\bar{\partial}I_s = \lambda R_{s-1}^1 + \lambda^2 R_{s-1}^2 + \dots + \lambda^n R_{s-1}^n + \dots, \quad (4.1.16)$$

donde R_{s-1}^n son ciertos campos locales pertenecientes a \mathbf{A} . Las dimensiones de cada sumando del miembro de la derecha deben coincidir con las del de la izquierda, $(s, 1)$, por lo tanto, el campo R_{s-1}^n tendrá dimensión conforme $(s - n(1 - \Delta), 1 - n(1 - \Delta))$ donde $(\Delta, \bar{\Delta})$ son las dimensiones conformes del campo Φ .

Como comentamos anteriormente, las teorías que estamos considerando son unitarias y, por lo tanto, no puede haber campos con dimensiones conformes negativas. Esto es equivalente a decir que la serie de sumandos (4.1.16) se truncará para algún valor de n , para el cual alguna de las dimensiones conformes de R_{s-1}^n se haga negativa.

En general, para $s \geq 2$, la condición de unitariedad será:

$$1 - n(1 - \Delta) \geq 0 \Rightarrow n \leq \frac{1}{(1 - \Delta)}. \quad (4.1.17)$$

En la mayoría de los casos sólo existe el primer sumando y, para $n \geq 2$, todos los demás son nulos. Esto significa:

$$1 - 2(1 - \Delta) < 0 \Rightarrow \Delta < \frac{1}{2}, \quad (4.1.18)$$

y, por lo tanto, si $\Delta < \frac{1}{2}$ la teoría será super-renormalizable a primer orden (no serán necesarios contratérminos). Nótese que esta condición supone una restricción más fuerte para los valores posibles de Δ que la condición de relevancia ($\Delta < 1$).

Por lo tanto nos concentraremos en la contribución de primer orden en λ . Se cumple entonces

$$\bar{\partial}I_s = \lambda R_{s-1}. \quad (4.1.19)$$

Ahora necesitamos encontrar el modo de identificar el campo R_{s-1} y, en particular, nuestro objetivo será calcular las cantidades conservadas asociadas a la CFT perturbada, o lo que es lo mismo, las cantidades I_s para las que el campo R_{s-1} es una derivada total.

Para identificar el campo R_{s-1} debemos tener en cuenta que la contribución de primer orden a cualquier función de correlación que involucre al campo I_s está dada por la integral:

$$\langle I_s \cdots \rangle = \langle I_s(z) \cdots \rangle_0 + \lambda \int dw d\bar{w} \langle \Phi(w, \bar{w}) I_s(z) \cdots \rangle_0, \quad (4.1.20)$$

donde $\langle \cdots \rangle_0$ es la función de correlación de la teoría no perturbada.

Teniendo en cuenta que $\bar{\partial} I_s$ recibe sólo contribuciones de la vecindad del punto singular $(w, \bar{w}) \mapsto (z, \bar{z})$, podemos utilizar la OPE de la CFT:

$$I_s(z) \Phi(w, \bar{w}) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^{n-s} (\mathcal{L}_{s,-n} \Phi)(w, \bar{w}), \quad (4.1.21)$$

donde $(\mathcal{L}_{s,-n} \Phi)$ son los campos locales definidos en (4.1.10). Utilizando esta OPE junto con las ecuaciones²

$$\bar{\partial}(w-z)^{-m-1} = -\frac{2\pi i}{m!} \partial^m \delta^{(2)}(z-w), \quad (4.1.22)$$

encontramos el resultado que vamos a utilizar en nuestro trabajo y que nos dice que el miembro de la derecha de la ecuación (4.1.19) se reduce a la siguiente integral:

$$\bar{\partial} I_s(z, \bar{z}) = \lambda \oint_z \frac{dw}{2\pi i} \Phi(w, \bar{z}) I_s(z). \quad (4.1.23)$$

Por lo tanto, el procedimiento a seguir será buscar la forma más general que pueden tener las cantidades conservadas I_s para unos valores determinados del spin, que en nuestro caso han sido 2 y 4, calcular las OPE's de dichas cantidades conservadas con el campo primario que actúa como perturbación e intentar probar que el residuo de esas OPE's, calculado tal y como se indica en (4.1.23), es una derivada total. Estos serán los pasos que vamos a seguir en el cálculo que presentamos en la sección (4.3) de este capítulo.

4.2 Factorizabilidad y ausencia de producción de partículas.

En la sección anterior hemos visto cómo el método de Zamolodchikov nos permite deducir las cantidades conservadas cuánticamente en teorías construidas como CFT's

²La demostración de estas relaciones sigue pasos muy similares a la del teorema de Gauss en electromagnetismo [40]. Consideremos el caso $m=0$, $\bar{\partial} y^{-1} = 2\pi i \delta(y) \delta(\bar{y})$, donde $y = w-z$ y $\bar{y} = \bar{w} - \bar{z}$. Demostrar que esta relación se cumple es equivalente a probar que si integramos en y e \bar{y} en ambos miembros el resultado es el mismo. Pero la función $1/y$ es singular en el origen, por ello para realizar esta integración debemos sustituirla por otra función que, en un cierto límite, sea igual a ella pero que esté bien definida en el origen, es decir:

$$\bar{\partial} y^{-1} = \lim_{a \rightarrow 0} \bar{\partial} \frac{\bar{y}}{|y|^2 + a^2} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a^2}{(|y|^2 + a^2)^2} = 2\pi i \delta(y) \delta(\bar{y}).$$

Una vez probada la relación para $m=0$, los demás casos se obtienen iterativamente, derivando con respecto a y .

perturbadas, como es el caso de las teorías SSSG.

En 1+1 dimensiones se ha podido calcular la matriz-S de forma exacta para un conjunto de Teorías de Campos relativistas que incluye a los modelos de sine-Gordon y sinh-Gordon, las teorías de Toda, los modelos quirales y varios modelos fermiónicos. Las matrices-S de estos modelos tienen 2 propiedades particulares que unidas a las propiedades generales de cruce, unitariedad y analiticidad, hacen posible su cálculo exacto. La primera es la factorizabilidad, que significa que la matriz-S de N partículas puede expresarse como producto de matrices-S de dos partículas y la segunda es la ausencia de producción de partículas, es decir, en cualquier proceso de scattering el número de partículas en el estado inicial es igual al número de partículas en el estado final. Estas dos propiedades son fruto de la existencia en la teoría cuántica de infinitas cargas conservadas que son integrales de densidades de corriente locales que transforman bajo el grupo de Lorentz como tensores de rango 0, ± 1 , ± 2 ... Cuando el rango es igual ó superior a 2 en módulo, las cargas conservadas se denominan cargas de spin superior y su existencia es de hecho fundamental para poder demostrar las dos propiedades de la matriz-S anteriormente mencionadas.

Resulta generalmente muy difícil comprobar la existencia de este conjunto infinito de densidades conservadas y relativamente fácil calcular explícitamente algunas de ellas (las correspondientes a los menores valores del spin), por eso es lógico preguntarse si realmente son necesarias todas esas cargas conservadas o si, por el contrario, es posible demostrar las propiedades de la matriz-S partiendo del conocimiento de la existencia de un número finito de cargas conservadas. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y se debe a Parke [13] quien, partiendo de una observación debida a Shankar y Witten [16], demostró la factorizabilidad y ausencia de producción de partículas suponiendo únicamente la existencia de dos cargas conservadas de spin superior, es decir, diferente de 0 y ± 1 , en una teoría masiva con una matriz-S analítica.

La sospecha de que pudiese ocurrir algo así se fundamentaba en un resultado bien conocido obtenido anteriormente por Coleman y Mandula [15], quienes demostraron que en más de una dimensión espacial una teoría con cargas conservadas de rango superior necesariamente tendría una matriz-S trivial. Era pues de esperar que en una dimensión espacial la existencia de cargas de spin superior implicase fuertes restricciones en lo que se refiere a la forma de la matriz-S.

4.2.1 Cantidades conservadas.

Como hemos comentado en la anterior introducción, en una Teoría Cuántica de Campos podemos encontrar dos tipos de cargas conservadas. En primer lugar tenemos el momento, y las cargas correspondientes a simetrías internas, cuyas transformaciones Lorentz son respectivamente, vectorial y escalar. En segundo lugar tenemos cargas de spin superior, que jugarán un papel clave en la demostración de la integrabilidad cuántica y que se comportan como tensores de rango 2 o superior con respecto a las transformaciones Lorentz.

Si elegimos coordenadas en el cono de luz $x_{\pm} = x^0 \pm x^1$, la transformación Lorentz de una carga de spin superior con spin m será:

$$Q_m \mapsto \Lambda^{+m} Q_m, \quad (4.2.24)$$

donde Λ representa la transformación Lorentz³.

Como es lógico, para $m = \pm 1$ tendríamos la transformación de las componentes $P^\pm = P^0 \pm P^1$ del momento.

Estas cargas satisfacen las siguientes reglas de conmutación:

$$[Q_m, P^\mu] = 0 \quad , \quad [Q_m, M^2] = 0 \quad y \quad [Q_m, Q_n] = 0 \quad \forall m, n, \quad (4.2.25)$$

que nos dicen que los autoestados de cargas de spin superior son combinaciones lineales de estados de partículas en el mismo multiplete de masa. Como resultado, en cada multiplete existirá un conjunto de estados de una partícula que serán simultáneamente autoestados del momento y de las cargas Q_m, Q_n, \dots Representaremos estos estados como $|p_a\rangle$, donde el subíndice a indica el tipo de partícula.

Los autovalores de Q_m están determinados por invariancia Lorentz:

$$Q_m |p_a\rangle = \eta_a^{(m)} (P^+)^m |p_a\rangle = (\mu_a)^m \eta_a^{(m)} e^{m\Phi_a} |p_a\rangle, \quad (4.2.26)$$

donde $\eta_a^{(m)}$ son escalares Lorentz no nulos que dependen de la combinación lineal concreta de estados de una partícula dentro del multiplete, y μ_a es la masa de la partícula. Supondremos que las cargas de spin superior son integrales de densidades de corriente locales. Esta importante propiedad nos permite asegurar que su acción sobre un estado de varias partículas, suficientemente separadas, es la suma de las acciones individuales sobre cada una de las partículas, es decir:

$$Q_m |p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_k}\rangle = \left(\sum_{i=1}^k (\mu_{a_i})^m \eta_{a_i}^{(m)} e^{m\Phi_{a_i}} \right) |p_{a_1} p_{a_2} \dots p_{a_k}\rangle, \quad (4.2.27)$$

³Sea $P_a = (P^0, P^1)$ el momento de una partícula a en un espacio 1+1-dimensional. La rapidez de la partícula es una magnitud Φ_a , tal que:

$$P^0 = \mu_a \cosh(\Phi_a), \quad P^1 = \mu_a \sinh(\Phi_a).$$

siendo μ_a la masa de dicha partícula.

El momento de la partícula en un sistema de referencia con respecto al cual esté en reposo es $P_a = (\mu_a, 0)$, mientras que, si consideramos un sistema de referencia con respecto al cual la partícula tenga velocidad v , el momento es $P_a = \gamma_v (\mu_a, \mu_a v)$, siendo $\gamma_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Es sencillo comprobar que la rapidez de la partícula en este último sistema de referencia viene dada por:

$$\Phi_a = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+v}{1-v} \right).$$

mientras que en el sistema de referencia en reposo su valor es nulo.

Bajo una transformación Lorentz general entre dos sistemas de referencia cuya velocidad relativa sea u la rapidez se transforma del siguiente modo:

$$e^{\Phi_a} \rightarrow \Lambda e^{\Phi_a} \iff \Phi_a \rightarrow \Phi_a + \log(\Lambda),$$

siendo $\Lambda = \sqrt{\frac{1+u}{1-u}}$ la transformación Lorentz que aparece en (4.2.24). Por lo tanto, la rapidez es una magnitud que bajo transformaciones Lorentz experimenta simplemente una traslación que viene dada por el logaritmo de la transformación Lorentz.

donde $|p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_k}\rangle$ representa un estado de k partículas a_i , con $i = 1 \dots k$, de momentos $p_{a_1}, p_{a_2}, \dots, p_{a_k}$.

Consideremos entonces un proceso de scattering de $M \rightarrow N$ partículas. La amplitud de scattering asociada será:

$$\langle p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_N} | S | q_{b_1} q_{b_2} \cdots q_{b_M} \rangle, \quad (4.2.28)$$

donde la matriz-S establece una correspondencia entre la base de estados-in y la base de estados-out y los subíndices a_i y b_i diferencian a los distintos tipos de partículas.

La ausencia de producción de partículas puede probarse simplemente imponiendo la conservación de las cargas, es decir, en el proceso de scattering que estamos considerando los estados inicial y final son autoestados de las cargas conservadas y, por lo tanto, los autovalores de estas cargas deben ser conservados en la interacción. Esto se expresa mediante la siguiente igualdad:

$$\sum_{k=1}^N (\mu_{a_k})^m \eta_{a_k}^{(m)} e^{m\Phi_{a_k}} = \sum_{k=1}^M (\mu_{b_k})^m \eta_{b_k}^{(m)} e^{m\Phi_{b_k}}. \quad (4.2.29)$$

Pero si existen cargas conservadas para infinitos valores diferentes del spin m , la igualdad anterior supone realmente un conjunto infinito de ecuaciones, una para cada valor de m , y la única forma de satisfacerlas todas, para valores genéricos de los momentos de las partículas iniciales es considerar la solución trivial, es decir, $N = M$ y, quizá después de reordenar los momentos de las partículas salientes,

$$\Phi_{a_i} = \Phi_{b_i}, \quad (\mu_{a_i})^m \eta_{a_i}^{(m)} = (\mu_{b_i})^m \eta_{b_i}^{(m)} \quad \text{con } i = 1 \dots n. \quad (4.2.30)$$

Este argumento puede encontrarse en [14], sin embargo, aunque la existencia de infinitas cargas conservadas es suficiente para establecer la ausencia de producción de partículas, no resulta tan fácil demostrar la factorizabilidad de la matriz-S partiendo de este único dato.

Esta es motivación suficiente como para proponer un segundo argumento, debido a Parke [13] 1980 y construido a su vez sobre una observación hecha por Shankar y Witten [16] en 1978.

4.2.2 Estados localizados y ausencia de producción de partículas.

El argumento de Parke, toma como punto de partida la caracterización de los estados localizados de una partícula como paquetes de onda de la forma:

$$\Psi(x, t) = N \int dp e^{f(p)} \quad \text{con } f(p) = -a(p - \bar{p})^2 + i(p(x - x_0) - E(t - t_0)), \quad (4.2.31)$$

donde a es una constante que determina la dispersión en la velocidad del paquete y x_0, t_0 son las coordenadas espacial y temporal del centro del paquete.

De este modo, un estado general de N partículas se representará mediante N paquetes de este tipo y la interacción de estas partículas implica el solapamiento de dichos paquetes de onda en una cierta región del espacio que llamaremos región de interacción.

Se puede comprobar fácilmente que la acción de $e^{i\alpha Q_m}$ sobre un paquete de ondas localizado de este tipo, produce un desplazamiento de las coordenadas del centro del paquete x_0, t_0 que depende del momento (P^+, P^-) de la partícula y, por supuesto, del parámetro α . Concretamente:

$$t_0 \rightarrow \tilde{t}_0 = t_0 + \alpha m \eta^{(m)}(\mu e^\Phi)^{(m-1)} = t_0 + \alpha m \eta^{(m)}(P^+)^{m-1}, \quad (4.2.32)$$

$$x_0 \rightarrow \tilde{x}_0 = x_0 - \alpha m \eta^{(m)}(\mu e^\Phi)^{(m-1)} = x_0 - \alpha m \eta^{(m)}(P^+)^{m-1}, \quad (4.2.33)$$

en particular cuando la carga conservada es el momento, es decir $m = 1$ y $\eta^{(m)} = 1$, la transformación se convierte en una simple traslación, como era de esperar.

Por lo tanto, y esto es una observación crucial, bajo transformaciones generadas por cargas de spin superior, los centros de los paquetes de ondas localizados asociados a partículas con diferentes momentos sufren diferentes desplazamientos.

El argumento de Parke hace uso además del llamado principio de macrocausalidad. Este principio nos dice que en un proceso de scattering con dos partículas iniciales y un número arbitrario N de partículas finales el tiempo de interacción de las dos partículas iniciales, t_{21} , será siempre anterior o igual al tiempo de interacción de la partícula entrante más lenta con la partícula saliente más rápida, t_{23} . Es decir, la producción de la partícula 3 será siempre posterior o, como mucho, simultánea a la interacción de las dos partículas entrantes. El proceso que estamos considerando se representa diagramáticamente en la siguiente figura:

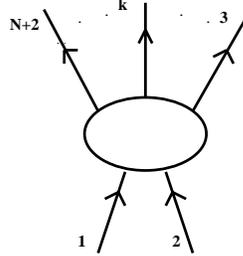


Figura 4.1: *Proceso de scattering de $2 \mapsto N$ partículas.*

Sabemos por otra parte que la amplitud de scattering debe ser invariante bajo una transformación generada por Q_m , es decir:

$$\langle p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_M} | S | q_{b_1} q_{b_2} \cdots q_{b_N} \rangle = \langle p_{a_1} p_{a_2} \cdots p_{a_M} | e^{-i\alpha Q_m} S e^{i\alpha Q_m} | q_{b_1} q_{b_2} \cdots q_{b_N} \rangle. \quad (4.2.34)$$

A partir de estas consideraciones, Parke prueba la ausencia de producción de partículas, introduciendo previamente los siguientes parámetros:

$$\hat{\eta}_{b_i}^{(m)} = \eta_{b_i}^{(m)}(\mu_{b_i})^{m-1} \quad \text{y} \quad \hat{\eta}_{b_i}^{(-n)} = \eta_{b_i}^{(-n)}(\mu_{b_i})^{n-1}, \quad (4.2.35)$$

donde, μ_{b_i} es la masa de la partícula b_i . Su demostración puede resumirse en los tres puntos siguientes:

- Si alguna de las partículas producidas en el estado final tiene rapidez y valores de $\hat{\eta}_{b_i}^{(m)}$ y $\hat{\eta}_{b_i}^{(-n)}$ diferentes a las rapidezces Φ_1 y Φ_2 y valores de $\hat{\eta}_{a_1}^{(m)}$ y $\hat{\eta}_{a_2}^{(-n)}$ de las partículas entrantes entonces, imponiendo la invariancia de la amplitud de scattering bajo una transformación generada por una determinada combinación lineal de dos cargas de spin superior y diferente, Parke deduce la posibilidad de la violación del principio de macrocausalidad.
- Más concretamente, Parke define la siguiente combinación lineal, Q_θ , de cargas de spin superior, con spines m y $-n$

$$Q_\theta = \cos\theta \frac{Q_m}{m} - \operatorname{sen}\theta \frac{Q_{-n}}{n}, \quad (4.2.36)$$

donde θ es un parámetro que puede tomar cualquier valor en el intervalo $[0, 2\pi]$, y demuestra que la invariancia de la amplitud de scattering bajo una transformación generada por esta carga conservada implica la violación del principio de macrocausalidad si en el estado final es producida cualquier partícula cuyos valores de $\hat{\eta}_{b_i}^{(m)}$ y $\hat{\eta}_{b_i}^{(-n)}$ y rapidez no coincidan con los de alguna de las partículas iniciales, salvo en puntos aislados del espacio de la diferencia de rapidezces $|\Phi_1 - \Phi_2|$ de las partículas entrantes.

Esto es equivalente a decir que la producción de una partícula saliente que cumpla estas condiciones implicaría la no analiticidad y no continuidad de la matriz-S y, por lo tanto, en las teorías que estamos considerando, no pueden producirse partículas con estas características.

- Al hilo de lo expuesto en los puntos anteriores, Parke demuestra también que sólo está permitida la producción de partículas salientes cuyas rapidezces y escalares $\hat{\eta}_{b_i}^{(m)}$ y $\hat{\eta}_{b_i}^{(-n)}$ coincidan con los de alguna de las entrantes.

Esta última y las anteriores demostraciones conducen a Parke a la importante conclusión de que en las teorías que estamos considerando no puede existir producción de partículas en ningún proceso de scattering ya que, la conservación de la energía-momento nos dice que si hay dos partículas inicialmente, hay como máximo otras dos en el estado final cuyas rapidezces y valores de $\hat{\eta}_{b_i}^{(m)}$ y $\hat{\eta}_{b_i}^{(-n)}$ deben coincidir con los de las dos partículas entrantes.

Concluimos entonces que, en general, se verifica:

$$\langle p_1 p_2 \cdots p_N | S | q_1 q_2 \rangle \sim \delta_{N,2} \delta^{(2)}(p_1 - q_1) \delta^{(2)}(p_2 - q_2). \quad (4.2.37)$$

4.2.3 Factorizabilidad.

La demostración de la factorizabilidad de la matriz-S se basa en la representación de los estados monoparticulares mediante paquetes de onda localizados, junto con la importante propiedad de que, bajo transformaciones generadas por cargas de spin superior,

los centros de los paquetes de ondas localizados asociados a partículas con diferentes momentos sufren diferentes desplazamientos.

El argumento es muy intuitivo [14] y se resume en que si la amplitud de scattering de cualquier proceso es invariante bajo una transformación del tipo (4.2.34) y esa transformación tiene a su vez como efecto el desplazamiento del centro del paquete de ondas asociado a una partícula, será posible convertir cualquier proceso en el que interaccionen más de dos partículas en una sucesión de procesos en los que las partículas interaccionan dos a dos. Esto puede verse más claramente en la figura (4.2). En ella se representan los diagramas correspondientes a todos los posibles procesos de scattering que pueden darse con 3 partículas iniciales.

En principio, estos procesos son diferentes y, en una teoría general, nada indicaría que sus amplitudes de scattering tuviesen que coincidir. Sin embargo, es sencillo demostrar que en las teorías que estamos considerando, la demostración de la existencia de, al menos, dos cargas de spin superior supone una restricción tan fuerte que realmente implica que esas amplitudes coinciden.

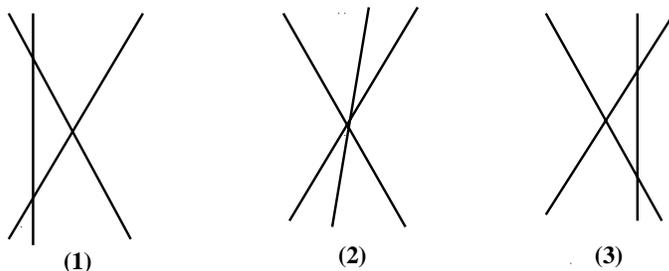


Figura 4.2: *Procesos de scattering de $3 \mapsto 3$ partículas.*

La razón es que todos los diagramas anteriores son equivalentes módulo transformaciones generadas por cargas de spin superior, es decir, el diagrama (2) es, por ejemplo, equivalente al (1) salvo una traslación aplicada a una de las partículas, que es justamente el efecto de las cargas de spin superior. Por lo tanto estamos diciendo que un proceso en el que hay una interacción de 3 partículas es equivalente a otro donde se dan tres interacciones independientes entre pares de partículas.

Estas interacciones son independientes porque la transformación generada por e^{iaQ_m} incluye el parámetro libre α , al que podemos dar un valor arbitrario, y esto hace posible que la traslación inducida sea también tan grande como queramos, según nos indican las relaciones (4.2.32) y (4.2.33).

Como es evidente, lo mismo sucederá en un proceso general de $N \rightarrow N$ partículas, de modo que podemos considerar probada la factorizabilidad de estas teorías.

4.3 Cantidades conservadas cuánticamente en modelos split.

En el capítulo 2 nos hemos ocupado ya de la obtención de las densidades conservadas clásicamente asociadas a spines 2 y 4 y este cálculo ha sido totalmente general, es decir,

los resultados obtenidos son válidos para todos los modelos split, independientemente de que G_0 sea o no simple. Para estudiar las densidades conservadas cuánticamente nos restringiremos al caso en que G_0 es simple por su mayor sencillez.

Aunque nuestro objetivo es ahora el cálculo de al menos dos de las densidades conservadas cuánticamente para poder probar la integrabilidad, el cálculo clásico nos va a ser de gran ayuda, puesto que los resultados que presentaremos más tarde nos demuestran que las densidades conservadas cuánticamente pueden expresarse como suma de las densidades clásicas y de una serie de correcciones en \hbar^n , con $n = 1, 2, \dots$

Esto no es más que la consecuencia directa de que las densidades conservadas cuánticamente se obtienen de la renormalización de las densidades conservadas clásicamente, es decir, cada una de las densidades conservadas cuánticamente es la suma de la correspondiente densidad conservada clásicamente ordenada normalmente y de una serie de contratérminos.

Es importante señalar que cuando hablemos de densidades de spin 2 ó 4 nos estaremos refiriendo implícitamente también a densidades de spin -2 ó -4 puesto que, por cada densidad de spin positivo tenemos otra de spin con signo opuesto que se obtiene haciendo los cambios:

$$J^a \rightarrow \bar{J}^a, \text{ y } \Lambda_- \rightarrow \Lambda_+. \quad (4.3.38)$$

Esta consideración resulta importante puesto que el argumento de Parke se fundamenta en la existencia de dos densidades conservadas de spin superior, siendo estos spines diferentes en valor absoluto y de signo opuesto.

Por lo tanto, nuestra demostración de la integrabilidad de los modelos split se basa no realmente en la demostración de la existencia de densidades conservadas de spines 2 y 4, sino en la existencia de densidades conservadas de spines 2 y -4 ó -2 y 4 y, aunque en nuestro trabajo hayamos obtenido las densidades asociadas a spines positivos, no debemos olvidar que, por cada una de ellas tenemos otra de spin opuesto.

En la sección (4.1) hemos visto cuáles son los pasos a seguir en el cálculo de las densidades conservadas cuánticamente. Una vez determinada la forma más general que puede tener una densidad conservada para un cierto valor del spin, debemos obtener el resultado de la OPE que aparece en (4.1.23), teniendo en cuenta que la ecuación (4.1.23) es exacta suponiendo que se cumple la condición de super-renormalizabilidad a primer orden, que limita los valores posibles de la dimensión conforme de la perturbación, tal y como indica (4.1.18).

Demostrar que una cierta densidad I_s es conservada equivale a encontrar un campo \bar{I}_s en la teoría original tal que se verifique la igualdad:

$$\bar{\partial} I_s = \partial \bar{I}_s. \quad (4.3.39)$$

Para ello basta exigir que el residuo del polo simple de la OPE entre I_s y $\Phi(w, \bar{z})$ sea una derivada total, es decir:

$$\Phi(w, \bar{z}) I_s(z) = \sum_{n>1} \frac{\{\Phi I_s\}_n}{(w-z)^n} + \frac{\partial \bar{I}_s}{(w-z)} + \dots \quad (4.3.40)$$

donde los puntos suspensivos indican siempre términos regulares.

Hay que señalar que los residuos del polo simple asociados a las OPE's $\Phi(w, \bar{z})I_s(z)$ e $I_s(z)\Phi(w, \bar{w})$ difieren únicamente en una derivada total y, de hecho, vamos a calcular siempre el segundo ya que su expresión es normalmente mucho más sencilla.

Es también importante recordar los límites en que las cantidades clásicas se recuperan a partir de las cuánticas. Dichos límites son los siguientes:

$$J^a t^a = -(\hbar k)q \quad \hbar k \mapsto \frac{1}{\beta^2} \quad y \quad k \mapsto \infty, \quad (4.3.41)$$

donde q es el potencial que aparece en la expresión del operador de Lax L en (2.5.109) y β es la constante de acoplamiento que aparece en la acción (2.1.1).

Finalmente, aunque en el apéndice A presentamos con mayor detalle las principales características del modelo de Wess–Zumino–Witten, conviene mencionar aquí algunos resultados que serán utilizados con mucha frecuencia a lo largo de los cálculos de las siguientes secciones.

A nivel cuántico, los modelos split vienen descritos por una acción de la forma

$$S = S_{WZW} + \frac{m^2}{\pi\beta^2} \int d^2x \Phi(x, t), \quad (4.3.42)$$

donde la acción S_{WZW} es en este caso la acción del modelo de Wess–Zumino–Witten asociada al grupo G_0 a nivel k . La carga central asociada a esta CFT es

$$c_{WZW}(G_0, k) = \frac{k \dim(G_0)}{k + h_{g_0}^\vee}. \quad (4.3.43)$$

Por otra parte, el campo $h(z, \bar{z})$ tiene dimensión conforme

$$\Delta_h = \frac{C_{g_0}(r)}{2(k + h_{g_0}^\vee)}, \quad (4.3.44)$$

la cual depende de la representación de G_0 elegida mediante del casimir $C_{g_0}(r)$ definido como:

$$C_{g_0}(r) \cdot I = t_r^\alpha t_r^\alpha, \quad (4.3.45)$$

siendo t_r^α los generadores de la subálgebra invariante g_0 definidos en la sección (2.4.3) en la representación r .

Es también importante determinar la dimensión conforme de la perturbación $\Phi(z, \bar{z})$. Un modo de hacerlo, válido para el caso en que g_0 sea un álgebra simple y, por lo tanto, podamos escribir

$$f^{\alpha\beta\gamma} f^{\xi\beta\gamma} = C_{g_0} \delta^{\alpha\xi}, \quad (4.3.46)$$

siendo C_{g_0} el casimir de G_0 en la representación adjunta, consiste en calcular la OPE entre el campo primario y el tensor energía–momento, puesto que ésta tiene, para un campo primario, la forma general

$$T(z)\Phi(w, \bar{w}) = \Delta_\Phi \frac{\Phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial_w \Phi(w, \bar{w})}{(z-w)} \dots \quad (4.3.47)$$

Si calculamos esta OPE para el campo $\Phi(w, \bar{w}) = \langle \Lambda_-, P \rangle$ que actúa como perturbación en la acción (4.3.42), considerando el caso en que G_0 es simple, llegamos al resultado

$$\Delta_\Phi = \frac{(\Psi_g^2 / \Psi_{g_0}^2) h_g^\vee}{2(k + h_{g_0}^\vee)} \quad (4.3.48)$$

donde hemos tomado

$$T(z) = \frac{1}{N} (J^\alpha J^\alpha), \text{ con } N = -\hbar^2 \Psi_{g_0}^2 (k + h_{g_0}^\vee). \quad (4.3.49)$$

Además la forma general de la OPE de una corriente $J^a(z)$ con un campo primario $\Phi(w, \bar{w})$ de spin nulo es:

$$J^a(z) \Phi(w, \bar{w}) = -\hbar \frac{t^a \Phi(w, \bar{w})}{z - w} + \dots \quad (4.3.50)$$

En la representación adjunta, y tomando un campo $\Phi(w, \bar{w}) = \langle \Lambda_-, P(w, \bar{w}) \rangle$, con $P(w, \bar{w}) = (h\Lambda_+ h^\dagger) = h^{ad} \Lambda_+$, la ecuación anterior se transforma en:

$$J^a(z) \langle \Lambda_-, P(w, \bar{w}) \rangle = -\hbar \frac{\langle [\Lambda_-, t^a], P \rangle}{(z - w)} + \dots \quad (4.3.51)$$

También en la representación adjunta, la ecuación (A.1.8) que presentamos en el apéndice A toma la forma:

$$\hbar (k + h_g^\vee) \partial \langle \Lambda_-, P \rangle = (J^a \langle [\Lambda_-, t^a], P(w, \bar{w}) \rangle), \quad (4.3.52)$$

donde los paréntesis $()$ representan el orden normal que se define en el apéndice B.

Con esto, pasamos ya al cálculo de las cantidades conservadas de spin 2.

4.3.1 Densidades conservadas de spin 2.

Consideremos un operador genérico, ordenado normalmente, de spin 2, construido a partir de las corrientes del modelo de WZW:

$$I_2(z) = D_{\alpha\beta} (J^\alpha J^\beta)(z) + C_\alpha \partial J^\alpha(z) \quad (4.3.53)$$

Si descomponemos $D_{\alpha\beta}$ como suma de una parte totalmente simétrica y otra totalmente antisimétrica, $D_{\alpha\beta} = D_{(\alpha\beta)} + D_{[\alpha\beta]}$, entonces:

$$D_{[\alpha\beta]} (J^\alpha J^\beta)(z) = D_{[\beta\alpha]} [(J^\alpha J^\beta)(z) - \hbar f^{\alpha\beta\gamma} \partial J^\gamma(z)] \quad (4.3.54)$$

donde hemos utilizado la relación (B.2.9) del apéndice B.

La igualdad anterior es equivalente a:

$$2D_{[\alpha\beta]} (J^\alpha J^\beta)(z) = \hbar D_{[\alpha\beta]} f^{\alpha\beta\gamma} \partial J^\gamma(z) \quad (4.3.55)$$

de modo que podemos concluir que tomar el tensor $D_{\alpha\beta}$ como totalmente simétrico no supone pérdida alguna de generalidad ya que su parte antisimétrica sólo generaría un término del tipo ∂J^α que podría englobarse en (4.3.53) redefiniendo C_α .

Por otra parte, es posible comprobar que la OPE de un término del tipo ∂J^α con un campo primario produce siempre derivadas totales y, por ello, su contribución no será tomada en cuenta.

Por lo tanto, la OPE que nos interesa, considerando ya $D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}$, es:

$$D_{\alpha\beta}(J^\alpha J^\beta)(z) \langle \Lambda_-, P(w, \bar{w}) \rangle = \frac{-2\hbar D_{\alpha\beta}(J^\beta \langle [\Lambda_-, t^\alpha], P(w, \bar{w}) \rangle)}{(z-w)} + \frac{D_{\alpha\beta}\hbar^2 \langle [[\Lambda_-, t^\alpha], t^\beta], P(w, \bar{w}) \rangle}{(z-w)^2}, + \dots \quad (4.3.56)$$

y el residuo, definido como

$$\text{Res}(D_{\alpha\beta}(J^\alpha J^\beta)(z) \langle \Lambda_-, P \rangle(w, \bar{w})) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i} (D_{\alpha\beta}(J^\alpha J^\beta)(z) \langle \Lambda_-, P \rangle(w, \bar{w})), \quad (4.3.57)$$

es:

$$-2\hbar (J^\beta \langle D_{\alpha\beta} [\Lambda_-, t^\alpha], P \rangle)(w, \bar{w}). \quad (4.3.58)$$

Nuestro siguiente objetivo es determinar qué forma tiene que tener el tensor $D_{\alpha\beta}$ para que este residuo sea una derivada total. Para ello es conveniente elegir $D_{\alpha\beta}$ del siguiente modo:

$$(\hbar k)^2 D_{\alpha\beta} [\Lambda_-, t^\beta] = \frac{1}{2} [\vec{\mu} \cdot \vec{t}, t^\alpha] \quad (4.3.59)$$

donde $\vec{\mu}$ es un vector contenido en la CSA y, por lo tanto, tiene $rank(G)$ componentes. Obtenemos así la siguiente expresión para $D_{\alpha\beta}$:

$$(\hbar k)^2 D_{\alpha\beta}(\vec{\mu}) = \frac{1}{2} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{\alpha}}{\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}} \delta_{\alpha\beta} = m D_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{\mu}) \quad (4.3.60)$$

donde $\Lambda_- = \vec{\lambda} \cdot \vec{t}$ y $D_{\alpha\beta}^{(0)}$ es el tensor que aparece en las densidades clásicamente conservadas de spin 2, obtenidas en la sección (2.5.2). Como hemos explicado ya anteriormente, las densidades conservadas cuánticamente se obtienen de la renormalización de las clásicas y, por ello, cada densidad cuánticamente conservada puede expresarse como la suma de la correspondiente densidad clásica, ordenada normalmente, y de una serie de correcciones en potencias de \hbar que resultan de esta ordenación normal. Por lo tanto, en general se verifica

$$(\hbar k)^2 D_{\alpha\beta}(\vec{\mu}) = m D_{\alpha\beta}^{(0)}(\vec{\mu}) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^n}\right), \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.61)$$

y la relación $(\hbar k)^2 D_{\alpha\beta} = m D_{\alpha\beta}^{(0)}$ nos indica entonces que, en este caso particular, las densidades conservadas de spin 2 coinciden a nivel clásico y cuántico, es decir, no es necesario añadir contratérminos. Para llegar a esta igualdad es preciso utilizar las relaciones (4.3.41).

Sustituyendo esta elección para $D_{\alpha\beta}$ en (4.3.58) y utilizando la ecuación (4.3.52), restringida al grupo G_0 obtenemos:

$$\begin{aligned} -2\hbar D_{\alpha\beta}(J^\beta \langle [\Lambda_-, t^\alpha], P \rangle)(w, \bar{w}) &= -2\hbar (J^\beta \langle \frac{1}{2(\hbar k)^2} [\vec{\mu} \cdot \vec{t}, t^\alpha], P \rangle)(w, \bar{w}) = \\ &= -\frac{(k + h_{g_0}^\vee)}{k^2} \partial \langle \vec{\mu} \cdot \vec{t}, P \rangle(w, \bar{w}) \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

Como vemos, el residuo es una derivada total y esto es suficiente para concluir el carácter conservado de estas densidades de spin 2. Sin embargo, este caso es particularmente simple, en lo referente a la expresión de la OPE (4.3.56), y por ello podemos obtener también la forma exacta del campo \bar{I}_2 , para lo cual necesitamos tener en cuenta la contribución del polo doble a la OPE (4.3.56). El residuo, tal y como lo hemos definido, se obtiene integrando la OPE anteriormente mencionada en la variable z y al hacer esto la contribución del polo doble es nula. No ocurriría lo mismo si integrásemos en la variable w , caso en el cual el polo doble nos daría como contribución una derivada total, mientras que la del polo simple sería esencialmente la misma, salvo un signo y, por supuesto, el cambio de w por z en la expresión (4.3.58). Esta derivada total es la diferencia entre el residuo (4.3.58) y el resultado de la integral

$$\partial \bar{I}_2(z, \bar{z}) = -km^2 \oint_z \frac{dw}{2\pi i} \Phi(w, \bar{z}) I_2(z), \quad (4.3.63)$$

que es la que nos da el valor exacto de \bar{I}_2 .

La contribución del polo doble es:

$$\hbar^2 \partial (J^\beta \langle D_{\alpha\beta} [[\Lambda_-, t^\alpha], t^\beta], P \rangle)(z, \bar{w}) = \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee}{4k^2} \partial (J^\beta \langle \vec{\mu} \cdot \vec{t}, P \rangle)(z, \bar{w}), \quad (4.3.64)$$

donde hemos utilizado

$$[[\Lambda_-, t^\alpha], t^\alpha] = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\lambda}) \alpha^B \cdot t^B \quad \text{y} \quad \sum_{\alpha > 0} \alpha^A \alpha^B = \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee}{2} \delta^{AB}. \quad (4.3.65)$$

El uso de estas relaciones implica la consideración de un grupo G_0 simple, como hemos demostrado en la sección (2.4.3) del capítulo 2.

Por lo tanto, sumando las dos contribuciones anteriores y tomando la constante de acoplamiento que aparece en (4.1.23) como $\lambda = -km^2$, obtenemos:

$$(\hbar k)^2 I_2(\vec{\mu}) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{\alpha}}{\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}} (J^\alpha J^\alpha), \quad (4.3.66)$$

$$(\hbar k)^2 \bar{I}_2(\vec{\mu}) = -m^2 (\hbar k)^2 \langle [1 + \frac{(4h_{g_0}^\vee - \Psi_g^2 h_g^\vee)}{4k}] \vec{\mu} \cdot \vec{t}, P \rangle. \quad (4.3.67)$$

Si comparamos estos resultados con los obtenidos clásicamente encontramos:

$$I_2(\vec{\mu}) = m \vec{\mu} \cdot \mathbf{I}_2^{(0)}, \quad \bar{I}_2(\vec{\mu}) = m \vec{\mu} \cdot \{ \bar{\mathbf{I}}_2^{(0)} + \frac{1}{k} \bar{\mathbf{I}}_2^{(1)} \}. \quad (4.3.68)$$

Esto confirma que efectivamente las densidades conservadas cuánticamente se pueden expresar en términos de las densidades clásicas añadiéndoles generalmente correcciones de orden $\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2} \dots$. Además, para cada valor del spin, existen $rank(G)$ cantidades conservadas, tantas como componentes tiene el vector de la CSA $\vec{\mu}$. En este caso, sólo recibe correcciones el campo \bar{I}_2 , cosa que es diferente en el caso de los modelos HSG, como puede verse en [2].

Otra observación interesante es que, como vemos hay una dependencia en el cociente $\Psi_g^2 / \Psi_{g_0}^2 = \Psi_g^2 / 2$ y en los números de coxeter dual h_g^\vee y $h_{g_0}^\vee$, de manera que el campo $\bar{I}_2(\vec{\mu})$

tiene una forma diferente para cada modelo split. Dado que los números de coxeter dual se encuentran tabulados (tabla 3.2), nos fijaremos sólo en la relación entre las longitudes de las raíces largas, distinguiendo dos casos:

- $G/G_0 = SU(n)/SO(n) \quad \forall \quad n \geq 2$.

En este caso, como ya vimos al estudiar la clasificación de estos modelos, $\Psi_g^2/\Psi_{g_0}^2 = 2$, de manera que:

$$(\hbar k)^2 \bar{I}_2(\vec{\mu}) = -m^2 (\hbar k)^2 \langle [1 + \frac{(h_{g_0}^\vee - h_g^\vee)}{k}] \vec{\mu} \cdot \vec{t}, P \rangle. \quad (4.3.69)$$

- $G/G_0 = E_6/Sp(4) \quad , \quad G/G_0 = E_7/SU(8) \quad \text{y} \quad G/G_0 = E_8/SO(16) \quad .$

En todos estos casos $\Psi_g^2/\Psi_{g_0}^2 = 1$, de manera que :

$$(\hbar k)^2 \bar{I}_2(\vec{\mu}) = -m^2 (\hbar k)^2 \langle [1 + \frac{(2h_{g_0}^\vee - h_g^\vee)}{2k}] \vec{\mu} \cdot \vec{t}, P \rangle. \quad (4.3.70)$$

• **Tensor energía–momento.**

El tensor energía–momento es una densidad conservada cuánticamente de spin 2, por lo tanto, deben de existir unas determinadas condiciones bajo las cuales las densidades conservadas anteriormente obtenidas se reduzcan a este tensor. De hecho, esas condiciones consisten en elegir $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$ en las densidades $I_2(\vec{\mu})$. En este caso la igualdad (4.3.66) se transforma en :

$$(\hbar k)^2 I_2(\vec{\lambda}) = \frac{1}{2} (J^\alpha J^\alpha) = -(k + h_{g_0}^\vee) \left\{ \frac{-1}{2(k + h_{g_0}^\vee)} (J^\alpha J^\alpha) \right\} \equiv -(k + h_{g_0}^\vee) T_{z,z}, \quad (4.3.71)$$

en concordancia con la construcción de Sugawara para el tensor energía–momento de una CFT [21], y, por lo tanto, (4.3.67) pasa a:

$$(\hbar k)^2 \bar{I}_2(\vec{\lambda}) = -m^2 (\hbar k)^2 \left[1 + \frac{(4h_{g_0}^\vee - \Psi_g^2 h_g^\vee)}{4k} \right] \langle \Lambda_-, P \rangle \equiv -(k + h_{g_0}^\vee) T_{z,z}. \quad (4.3.72)$$

Concluimos entonces que nuestros resultados son consistentes con la construcción de Sugawara para el tensor energía–momento.

Con referencia también al tensor energía–momento hemos comprobado la compatibilidad de nuestros resultados con los presentados por Cardy en [17] sobre la modificación de la ley de conservación del tensor energía–momento de cualquier CFT, que se corresponde siempre con un modelo estadístico en el punto crítico, cuando ésta es alejada de la criticalidad mediante una perturbación relevante. Los resultados de Cardy son totalmente generales, válidos para cualquier CFT que sea perturbada mediante un campo

primario de la propia teoría y, por lo tanto, deben de ser también aplicables para los modelos split.

El resultado al que nos referimos puede resumirse en que, para cualquier teoría cuyas características sean las mencionadas en el párrafo anterior, se verifica la siguiente ley de conservación cuántica del tensor energía-momento:

$$\bar{\partial}T_{z,\bar{z}} = -\frac{1}{4}\partial\theta \quad \text{con} \quad \theta = -4\pi\rho(1-\Delta)\Phi(z,\bar{z}), \quad (4.3.73)$$

donde ρ es una constante proporcional a la constante de acoplamiento, que en nuestro caso es $\lambda = -km^2$, Δ es la dimensión conforme de la perturbación y $\Phi(z,\bar{z})$ es el campo que actúa como perturbación.

Sabemos que la dimensión conforme Δ de las perturbaciones asociadas a los cosets que estamos considerando es:

$$\Delta = \frac{(\Psi_g^2/\Psi_{g_0}^2)h_g^\vee}{2(k+h_{g_0}^\vee)} \quad \text{con} \quad \Psi_{g_0}^2 = 2, \quad (4.3.74)$$

por lo tanto:

$$1-\Delta = \frac{4(k+h_{g_0}^\vee) - \Psi_g^2 h_g^\vee}{4(k+h_{g_0}^\vee)} \quad (4.3.75)$$

Si tomamos $\rho = -\frac{km^2\hbar^2}{\pi}$ y sustituimos (4.3.75) en (4.3.73) el resultado es:

$$T_{z,\bar{z}} = \frac{m^2(\hbar k)^2}{(k+h_{g_0}^\vee)} \left[1 + \frac{(4h_{g_0}^\vee - \Psi_g^2 h_g^\vee)}{4k} \right] \langle \Lambda_-, P \rangle \quad (4.3.76)$$

resultado que coincide exactamente con (4.3.72), como queríamos probar.

4.3.2 Densidades conservadas de spin 4.

El procedimiento a seguir para este caso es exactamente el mismo que para spin 2, sin embargo, su estudio resulta más complejo debido a que en las OPE's que hemos tenido que calcular intervienen productos ordenados de hasta 4 corrientes. Esta es la razón por la cual en este caso sólo hemos calculado una de las densidades conservadas.

En la sección (2.5.3) del capítulo 2 hemos obtenido las densidades conservadas clásicamente de spin 4, y hemos visto también como, en el caso particular $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$, obteníamos una densidad conservada cuya expresión era notablemente más sencilla que el resultado general. Teniendo esto en cuenta, la densidad conservada cuánticamente de spin 4 que hemos calculado, ha sido justamente aquella que resulta de la renormalización de la densidad conservada clásicamente más sencilla.

La forma más general que puede tener una densidad conservada de spin 4, en términos de corrientes de WZW, es la siguiente:

$$\begin{aligned} I_4(z) = & R_{\alpha\beta\gamma\rho}(J^\alpha(J^\beta(J^\gamma J^\rho)))(z) + P_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(J^\beta\partial J^\gamma))(z) + \\ & + M_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(\partial J^\beta J^\gamma))(z) + T_{\alpha\beta\gamma}(\partial J^\alpha(J^\beta J^\gamma))(z) + \\ & + Q_{\alpha\beta}(J^\alpha\partial^2 J^\beta)(z) + D_\alpha\partial^3 J^\alpha. \end{aligned} \quad (4.3.77)$$

Sin embargo, la forma general de $I_4(z)$ debe de ser tal que los términos que aparezcan no sean redundantes, es decir, habrá que seleccionar los tensores de manera que formen un conjunto independiente, tal y como hicimos en el caso de spin 2 cuando demostramos que el tensor $D_{\alpha\beta}$ debía ser totalmente simétrico porque la parte antisimétrica producía una contribución que era equivalente a redefinir el otro tensor, C_α .

Teniendo en cuenta esta observación hemos demostrado que, módulo derivadas totales, la forma más general de las densidades de spin 4 es:

$$I_4(z) = R_{\alpha\beta\gamma\rho}(J^\alpha(J^\beta(J^\gamma J^\rho)))(z) + P_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma))(z) + Q_{\alpha\beta}(J^\alpha \partial^2 J^\beta)(z), \quad (4.3.78)$$

con las siguientes restricciones:

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho} = R_{(\alpha\beta\gamma\rho)}, \quad P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\beta\alpha\gamma}, \quad (4.3.79)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\beta\alpha} + P_{\alpha\gamma\beta} = 0, \quad Q_{\alpha\beta} = Q_{\beta\alpha}. \quad (4.3.80)$$

Es decir, $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ es totalmente simétrico, ya que cualquier intercambio de índices produce al reordenar términos del tipo $(J(J\partial J))$, que se absorberían en una redefinición de $P_{\alpha\beta\gamma}$. Análogamente, $P_{\alpha\beta\gamma}$ es simétrico en sus dos primeros índices ya que, un intercambio de éstos produce al reordenar términos del tipo $(\partial J\partial J)$, que se absorberían en una redefinición de $Q_{\alpha\beta}$. La primera condición de (4.3.80) es más difícil de deducir y resulta de utilizar las relaciones existentes entre términos del tipo $(J(\partial J J))$, $(J(J\partial J))$ y $(\partial J(JJ))$. Finalmente, es fácil comprobar que un intercambio de los índices de $Q_{\alpha\beta}$ produce al reordenar términos del tipo $\partial^3 J$, que se absorberían en una redefinición de D_α , término que, por otra parte, no se tiene en cuenta porque su OPE con el campo primario produce siempre derivadas totales. Estos comentarios sobre la elección de tensores pueden verse con más detalle en el apéndice B.

En el apéndice B se presenta también el resultado completo de la OPE $I_4\langle \Lambda_-, P \rangle$, pero para demostrar la conservación de $I_4(z)$ nos basta con restringirnos al polo simple que nos da la única contribución al residuo que es no nula, con la definición utilizada.

La contribución del polo simple al residuo es:

$$\begin{aligned} \text{Res}\left(I_4(z)\langle \Lambda_-, P \rangle(w, \bar{w})\right) &= \hbar \left\{ (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma \langle \Omega_{\alpha\beta\gamma}, P \rangle))) + (\partial J^\alpha(J^\beta \langle M_{\alpha\beta}, P \rangle)) + \right. \\ &\quad \left. + (\partial^2 J^\alpha \langle T_\alpha, P \rangle) \right\}(w, \bar{w}), \end{aligned} \quad (4.3.81)$$

donde

$$\Omega_{\alpha\beta\gamma} = 4 R_{\alpha\beta\gamma\rho} [\Lambda_-, t^\rho], \quad (4.3.82)$$

$$M_{\alpha\beta} = -12 \hbar R_{\alpha\beta\gamma\rho} [[\Lambda_-, t^\gamma], t^\rho] - 2(P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\beta\gamma\alpha}) [\Lambda_-, t^\gamma], \quad (4.3.83)$$

$$\begin{aligned} T_\alpha &= 2 \hbar^2 R_{\alpha\beta\gamma\rho} [[[\Lambda_-, t^\beta] t^\gamma], t^\rho] + \hbar (P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\alpha}) [[\Lambda_-, t^\beta], t^\gamma] + \\ &\quad + (2 Q_{\alpha\rho} + \hbar f^{\beta\gamma\alpha} P_{\beta\rho\gamma}) [\Lambda_-, t^\rho]. \end{aligned} \quad (4.3.84)$$

Nuestro objetivo es demostrar que este residuo es una derivada total, es decir, que existen dos tensores $F_{\alpha\beta}$ y R_α , con componentes en g_1 , tales que⁴:

$$Res\left(I_4(z)\langle \Lambda_-, P \rangle(w, \bar{w})\right) = \partial(J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) + \partial(\partial J^\alpha\langle R_\alpha, P \rangle). \quad (4.3.85)$$

Utilizando la ecuación (4.3.52) particularizada para G_0 , se verifica que:

$$\begin{aligned} \partial(J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) &= (\partial J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) + (J^\alpha(\partial J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) + \\ &+ (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle [\hat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma], P \rangle))), \end{aligned} \quad (4.3.86)$$

$$\partial(\partial J^\alpha\langle R_\alpha, P \rangle) = (\partial^2 J^\alpha\langle R_\alpha, P \rangle) + (\partial J^\alpha(J^\beta\langle [\hat{R}_\alpha, t^\beta], P \rangle)), \quad (4.3.87)$$

donde

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = \frac{F_{\alpha\beta}}{\hbar(k + h_{g_0}^\vee)} \quad y \quad \hat{R}_\alpha = \frac{R_\alpha}{\hbar(k + h_{g_0}^\vee)}. \quad (4.3.88)$$

En resumen, queremos encontrar tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ tales que se verifique la igualdad

$$\begin{aligned} \hbar\left\{ (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle \Omega_{\alpha\beta\gamma}, P \rangle))) + (\partial J^\alpha(J^\beta\langle M_{\alpha\beta}, P \rangle)) + (\partial^2 J^\alpha\langle T_\alpha, P \rangle) \right\}(w, \bar{w}) &= \\ = \hbar\left\{ (\partial J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) + (J^\alpha(\partial J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P \rangle)) + (\partial^2 J^\alpha\langle R_\alpha, P \rangle) + \right. \\ \left. + (\partial J^\alpha(J^\beta\langle [\hat{R}_\alpha, t^\beta], P \rangle)) + (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle [\hat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma], P \rangle))) \right\}(w, \bar{w}), \end{aligned} \quad (4.3.89)$$

para algún par de tensores $F_{\alpha\beta}$ y R_α .

Identificando en la anterior ecuación términos con tres corrientes podemos deducir:

$$(J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle \Omega_{\alpha\beta\gamma}, P \rangle))) = (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle [\hat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma] |_{sim}, P \rangle))), \quad (4.3.90)$$

donde el símbolo $|_{sim}$ indica que se toma la parte simétrica del conmutador, puesto que $\Omega_{\alpha\beta\gamma}$ es totalmente simétrico.

Es decir:

$$3 \Omega_{\alpha\beta\gamma} = 12 R_{\alpha\beta\gamma\rho} [\Lambda_-, t^\rho] = [\hat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma] + [\hat{F}_{\alpha\gamma}, t^\beta] + [\hat{F}_{\gamma\beta}, t^\alpha]. \quad (4.3.91)$$

La característica más destacable de esta relación es que no recibe correcciones cuánticas, de manera que cuando tomemos el límite clásico la relación será la misma.

Es fácil obtener, utilizando las relaciones entre ordenaciones normales del apéndice B, la siguiente igualdad:

⁴En lo sucesivo consideraremos que el tensor $F_{\alpha\beta}$ es totalmente simétrico, puesto que una parte antisimétrica sólo produciría una contribución equivalente a la transformación $R_\alpha \mapsto R_\alpha + \frac{\hbar}{2} f^{\alpha\beta\gamma} F_{[\gamma\beta]}$.

$$(J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle[\widehat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma]|_{sim}, P\rangle))) = (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\langle[\widehat{F}_{\alpha\beta}, t^\gamma], P\rangle))) + \hbar f^{\gamma\rho\beta}(J^\alpha(\partial J^\beta\langle[\widehat{F}_{\alpha\rho}, t^\gamma], P\rangle)) + \frac{\hbar^2}{6} f^{\xi\gamma\rho} f^{\beta\rho\alpha}(\partial^2 J^\alpha\langle[\widehat{F}_{\xi\beta}, t^\gamma], P\rangle). \quad (4.3.92)$$

Por lo tanto aparecen dos términos adicionales que nos dan la diferencia entre la parte simetrizada y no simetrizada que habrá que tener en cuenta.

Identificados ya los términos con 3 corrientes, nuestro siguiente paso será comparar los términos del tipo $(J(\partial J\langle\dots\rangle))$ y $(\partial J(J\langle\dots\rangle))$. Estos términos van a ser tratados conjuntamente puesto que pueden relacionarse entre si y la diferencia siempre genera términos del tipo $(\partial^2 J\langle\dots\rangle)$. Más concretamente encontramos que si $G_{\alpha\beta}$ es un tensor totalmente general, se verifica:

$$(\partial J^\alpha(J^\beta\langle G_{\alpha\beta}, P\rangle)) = (J^\alpha(\partial J^\beta\langle G_{\beta\alpha}, P\rangle)) + \frac{\hbar}{2} f^{\alpha\beta\gamma}(\partial^2 J^\gamma\langle G_{\alpha\beta}, P\rangle). \quad (4.3.93)$$

En particular, si $G_{\alpha\beta}$ fuese un tensor simétrico el último sumando se anularía.

Igualando entonces los términos con 2 corrientes que aparecen en cada miembro de la ecuación (4.3.89) y teniendo en cuenta el término de este tipo que se genera como consecuencia de la relación (4.3.92) obtenemos:

$$(\partial J^\alpha(J^\beta\langle M_{\alpha\beta}, P\rangle)) = (\partial J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P\rangle)) + \hbar f^{\rho\gamma\beta}(J^\alpha(\partial J^\beta\langle[\widehat{F}_{\alpha\rho}, t^\gamma], P\rangle)) + (J^\alpha(\partial J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P\rangle)) + (\partial J^\alpha(J^\beta\langle[\widehat{R}_\alpha, t^\beta], P\rangle)). \quad (4.3.94)$$

Utilizando (4.3.93) podemos transformar todos los términos de la ecuación anterior en términos del tipo $(\partial J(J\langle\dots\rangle))$, en particular:

$$(J^\alpha(\partial J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P\rangle)) = (\partial J^\alpha(J^\beta\langle F_{\alpha\beta}, P\rangle)), \quad (4.3.95)$$

ya que $F_{\alpha\beta}$ es un tensor totalmente simétrico, y

$$\begin{aligned} \hbar f^{\rho\gamma\beta}(J^\alpha(\partial J^\beta\langle[\widehat{F}_{\alpha\rho}, t^\gamma], P\rangle)) &= \hbar f^{\rho\gamma\alpha}(\partial J^\alpha(J^\beta\langle[\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\gamma], P\rangle)) + \\ &- \frac{\hbar^2}{2} f^{\beta\xi\alpha} f^{\rho\gamma\xi}(\partial^2 J^\alpha\langle[\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\gamma], P\rangle). \end{aligned} \quad (4.3.96)$$

Esto nos lleva a una relación entre tensores de la siguiente forma:

$$M_{\alpha\beta} = 2F_{\alpha\beta} + [\widehat{R}_\alpha, t^\beta] + \hbar f^{\rho\gamma\alpha}[\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\gamma], \quad (4.3.97)$$

y, utilizando (4.3.83) y (4.3.91):

$$\begin{aligned} -2(P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\beta\gamma\alpha})[\Lambda_-, t^\gamma] &= 2F_{\alpha\beta} + [\widehat{R}_\alpha, t^\beta] + \hbar\left\{[\widehat{F}_{\beta\rho}, [t^\alpha, t^\rho]] + \right. \\ &+ [[\widehat{F}_{\alpha\beta}, t^\rho], t^\rho] + [[\widehat{F}_{\alpha\rho}, t^\beta], t^\rho] + [[\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\alpha], t^\rho]\left.\right\}. \end{aligned} \quad (4.3.98)$$

Finalmente nos quedan los términos del tipo $(\partial^2 J \langle \dots \rangle)$. Igualando los términos de este tipo que aparecen en (4.3.89) y teniendo en cuenta las contribuciones adicionales que proceden de (4.3.92) y (4.3.96) llegamos a la siguiente relación entre tensores:

$$T_\alpha = R_\alpha - \frac{\hbar^2}{6} f^{\xi\gamma\rho} f^{\beta\rho\alpha} [\widehat{F}_{\xi\beta}, t^\gamma] + \frac{\hbar^2}{2} f^{\xi\beta\alpha} f^{\rho\gamma\xi} [\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\gamma] = R_\alpha - \frac{2\hbar^2}{3} f^{\xi\gamma\rho} f^{\beta\rho\alpha} [\widehat{F}_{\xi\beta}, t^\gamma]. \quad (4.3.99)$$

Sustituyendo (4.3.84) y haciendo una serie de manipulaciones que permiten agrupar términos del mismo orden en \hbar , la ecuación anterior pasa a:

$$\begin{aligned} -2Q_{\alpha\beta}[\Lambda_-, t^\beta] &= -R_\alpha + \hbar \left\{ (P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\alpha}) [[\Lambda_-, t^\beta], t^\gamma] + f^{\beta\gamma\alpha} P_{\beta\rho\gamma} [\Lambda_-, t^\rho] \right\} + \\ &+ 2\hbar^2 \left\{ R_{\alpha\beta\gamma\rho} [[[\Lambda_-, t^\beta], t^\gamma], t^\rho] + \frac{1}{3} f^{\xi\gamma\rho} f^{\beta\rho\alpha} [\widehat{F}_{\beta\xi}, t^\gamma] \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.100)$$

La ecuación (4.3.100) involucra como vemos a los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ y $(P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\alpha\gamma\beta})$, cuyas expresiones en términos de R_α y $F_{\alpha\beta}$ ya conocemos a través de (4.3.91) y (4.3.98). Por lo tanto podremos obtener una ecuación que relacione a $Q_{\alpha\beta}$ con R_α y $F_{\alpha\beta}$, consiguiendo así expresar todos los tensores que aparecen en $I_4(z)$ en función de estos dos.

En cuanto al tensor $P_{\alpha\beta\gamma}$ es interesante observar que no aparece directamente en ninguna de nuestras ecuaciones, sino que siempre aparece una diferencia de tensores. Si no tuviésemos ningún tipo de ligadura adicional para este tensor, no podríamos llegar a obtener una solución única para $P_{\alpha\beta\gamma}$, pero las ligaduras que para este tensor nos dan (4.3.79) y (4.3.80) lo hacen posible.

De hecho, si tomamos la ecuación (4.3.98), la reescribimos intercambiando los índices α y β , sumamos las dos ecuaciones y utilizamos (4.3.80) y (4.3.79) llegamos a una ecuación para $P_{\alpha\beta\gamma}$ de la forma:

$$\begin{aligned} -6P_{\alpha\beta\gamma}[\Lambda_-, t^\gamma] &= 4F_{\alpha\beta} + [\widehat{R}_\alpha, t^\beta] + [\widehat{R}_\beta, t^\alpha] + \hbar \left\{ [\widehat{F}_{\beta\rho}, [t^\alpha, t^\rho]] + [\widehat{F}_{\alpha\rho}, [t^\beta, t^\rho]] + \right. \\ &+ 2[[\widehat{F}_{\alpha\beta}, t^\rho], t^\rho] + 2[[\widehat{F}_{\alpha\rho}, t^\beta], t^\rho] + 2[[\widehat{F}_{\beta\rho}, t^\alpha], t^\rho] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.101)$$

Una vez planteadas las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100), nuestro objetivo es encontrar dos tensores $F_{\alpha\beta}$ y R_α en función de los cuales podamos obtener una expresión para $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ de modo que las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100) sean compatibles entre sí. Los términos involucrados en todas estas ecuaciones están contenidos en g_1 que, como sabemos, es la suma de la CSA y del subconjunto generado por $t^{\vec{\alpha}}$, siendo $\vec{\alpha} > 0$. Esto significa que podemos descomponer cada una de las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100) en dos ecuaciones, proyectando en uno u otro de estos dos subconjuntos de g_1 .

La utilidad de estas proyecciones radica en lo siguiente:

- la proyección en la CSA, genera un conjunto de ligaduras entre las diferentes componentes de los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_α ⁵, sin involucrar a los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y

⁵Los tensores \widehat{R}_α y $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ tienen componentes en la CSA y en el subconjunto de g , $\{t^{\vec{\alpha}}, \alpha > 0\}$. Dichas componentes se denotarán por $\widehat{F}_{\alpha\beta}^A$ y \widehat{R}_α^A en la CSA y por $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\vec{\gamma}}$ y $\widehat{R}_\alpha^{\vec{\gamma}}$ para las componentes $t^{\vec{\gamma}}$.

$Q_{\alpha\beta}$,

- la proyección en el subconjunto de g_1 generado por $t^{\hat{\alpha}}$ nos proporciona las expresiones de los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ en función de $\hat{F}_{\alpha\beta}$ y \hat{R}_{α} .

Sin embargo, no serán estas las únicas relaciones de interés, puesto que habremos de tener también en cuenta las propiedades de simetría (4.3.79) y (4.3.80).

La imposición de estas condiciones sobre los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$, expresados ya en función de $\hat{F}_{\alpha\beta}$ y \hat{R}_{α} de acuerdo con el procedimiento que hemos explicado en el párrafo anterior, genera un conjunto de nuevas ligaduras entre estos dos últimos tensores, las cuales se añadirán a las obtenidas mediante la proyección en la CSA de (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100). El resultado final es que, como veremos luego con mayor detalle, las componentes de $\hat{F}_{\alpha\beta}$ y \hat{R}_{α} están ligadas entre sí por un conjunto de ecuaciones que es mucho mayor al número de dichas componentes y, por lo tanto, las posibles soluciones del sistema están fuertemente restringidas.

Sin embargo, antes de intentar obtener soluciones para $\hat{F}_{\alpha\beta}$ y \hat{R}_{α} y por lo tanto, para $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$, es conveniente estudiar el límite clásico de las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100).

Al hacer esto podremos utilizar las soluciones clásicas ya obtenidas en el capítulo 2 para $R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)}$, $P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)}$ y $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, para obtener unas soluciones para $\hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\hat{R}_{\alpha}^{(0)}$. Esto nos será útil por varias razones:

- en primer lugar, a las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100), en el límite $\hbar \rightarrow 0$ también podemos aplicar todo lo dicho en los párrafos anteriores, obteniendo ligaduras entre las componentes de $\hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\hat{R}_{\alpha}^{(0)}$, pero en este caso conocemos de antemano cuáles tienen que ser los resultados para los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)}$, $P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)}$ y $Q_{\alpha\beta}^{(0)}$, es decir, tenemos realmente un conjunto de ecuaciones que relacionan entre sí las componentes de $\hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\hat{R}_{\alpha}^{(0)}$ con la particularidad de que el número de ecuaciones es mucho mayor al de incógnitas. Por lo tanto todas estas ecuaciones tienen que ser compatibles entre sí y esto nos sirve como prueba de que las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100) son correctas, al menos en el límite clásico,
- en segundo lugar, más tarde trataremos de buscar soluciones a nivel cuántico para $\hat{F}_{\alpha\beta}$ y \hat{R}_{α} que sean de la forma:

$$\hat{F}_{\alpha\beta} = \hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{F}_{\alpha\beta}^{(n)}}{k^n} \quad \text{y} \quad \hat{R}_{\alpha} = \hat{R}_{\alpha}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\hat{R}_{\alpha}^{(n)}}{k^n}, \quad (4.3.102)$$

y, por lo tanto nos interesa conocer la forma de las soluciones clásicas.

- **Obtención de las soluciones clásicas $\hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\hat{R}_{\alpha}^{(0)}$.**

El límite clásico de las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100) es el siguiente:

$$12 m^3 R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)} [\Lambda_-, t^\rho] = (\hbar k)^4 \left\{ [\hat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}, t^\gamma] + [\hat{F}_{\alpha\gamma}^{(0)}, t^\beta] + [\hat{F}_{\beta\gamma}^{(0)}, t^\alpha] \right\}, \quad (4.3.103)$$

$$2m^3 (P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} - P_{\beta\gamma\alpha}^{(0)}) [\Lambda_-, t^\gamma] = (\hbar k)^3 \left\{ 2(\hbar k) \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)} + [\widehat{R}_\alpha^{(0)}, t^\beta] \right\}, \quad (4.3.104)$$

$$2m^3 Q_{\alpha\beta}^{(0)} [\Lambda_-, t^\beta] = -(\hbar k)^3 \widehat{R}_\alpha^{(0)}, \quad (4.3.105)$$

donde hemos utilizado las relaciones siguientes entre tensores clásicos y cuánticos, válidas en este límite:

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho} = \frac{(\hbar k)^4}{m^3} R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)}, \quad P_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{(\hbar k)^3}{m^3} P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} \quad \text{y} \quad Q_{\alpha\beta} = \frac{(\hbar k)^2}{m^3} Q_{\alpha\beta}^{(0)}. \quad (4.3.106)$$

Estas relaciones se obtienen utilizando (4.3.41) y es especialmente importante no olvidar el signo negativo que aparece en la segunda igualdad puesto que, de no tenerlo en cuenta, encontraríamos que las ecuaciones (4.3.103), (4.3.104) y (4.3.105) serían incompatibles entre si, es decir, tendríamos que concluir que no existe solución clásica, cosa que no tiene sentido puesto que la integrabilidad clásica ya fue demostrada anteriormente.

La proyección de (4.3.103), (4.3.104) y (4.3.105) en la CSA nos da las siguientes relaciones:

$$\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)\bar{\gamma}} \gamma^A + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{(0)\bar{\alpha}} \alpha^A + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{(0)\bar{\beta}} \beta^A = 0, \quad (4.3.107)$$

$$2(\hbar k) \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A} = \widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\beta}} \beta^A, \quad (4.3.108)$$

$$(\hbar k) \widehat{R}_\alpha^{(0)A} = 0. \quad (4.3.109)$$

El siguiente paso sería sustituir los resultados clásicos (2.5.136), (2.5.137) y (2.5.138) y obtener los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\widehat{R}_\alpha^{(0)}$.

La solución general para los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\widehat{R}_\alpha^{(0)}$ clásicos se presenta a continuación. En este caso, al igual que en la sección (4.3.1) para las densidades conservadas clásicamente de spin 2, se introduce un vector arbitrario $\vec{\mu}$ contenido en la CSA, para expresar la existencia de un conjunto $rank(g)$ de soluciones:

$$R_\alpha^{(0)A} = 0, \quad R_\alpha^{(0)\bar{\gamma}} = -\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})}{(\hbar k)^3 (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} \delta_{\alpha\gamma}, \quad F_{\alpha\beta}^{(0)A} = -\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu}) \alpha^A}{2(\hbar k)^3 (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} \delta_{\alpha\beta}, \quad (4.3.110)$$

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta}^{(0)\bar{\gamma}} = & \frac{1}{4(\hbar k)^4} \left\{ \frac{1}{4} \left(\frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} f^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}} + \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\mu})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})^2} f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma}} \right) + \right. \\ & + \left(\frac{f^{\gamma\alpha\beta}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{3}{4} \frac{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) f^{\bar{\alpha}\gamma\bar{\beta}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \right) \left(\frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\mu})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} - \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\mu})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right) - \\ & \left. - \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\mu})}{4(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left(\frac{f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{f^{\bar{\alpha}\beta\bar{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right) \right\}, \quad (4.3.111) \end{aligned}$$

y, como podemos fácilmente comprobar, este último tensor es nulo si se repiten dos índices cualesquiera, es decir

$$F_{\alpha\alpha}^{(0)\vec{\gamma}} = F_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\alpha}} = F_{\alpha\alpha}^{(0)\vec{\alpha}} = 0, \quad (4.3.112)$$

resultado que, por otra parte, no es una característica particular de las soluciones clásicas sino que cualquier tensor $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\gamma}}$ que satisfaga la condición (4.3.107) ha de cumplir también (4.3.112). Puesto que la ecuación (4.3.107) se ha obtenido a partir del límite clásico de (4.3.91), ecuación que no posee correcciones, esto significa que las soluciones $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\vec{\gamma}}$ a nivel cuántico también cumplirán (4.3.112).

Es fácil comprobar esta afirmación sin más que observar la forma de la ecuación (4.3.107) y darnos cuenta de que los “coeficientes” no son cantidades libres, sino que son precisamente las raíces positivas del álgebra de Lie \bar{g} . Podemos destacar varias características:

- por cada conjunto de tres raíces fijas α , β , y γ tenemos una ecuación diferente que involucra a los tensores $F_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\gamma}}$, $F_{\alpha\gamma}^{(0)\vec{\beta}}$, $F_{\gamma\beta}^{(0)\vec{\alpha}}$. Ninguno de estos tensores aparecerá en otra ecuación que involucre a tres raíces que no sean las anteriores,
- la ecuación (4.3.107) nos dice, para cada conjunto de tres raíces positivas fijas, que existe una combinación lineal de dichas raíces, con “coeficientes” $F_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\gamma}}$, $F_{\alpha\gamma}^{(0)\vec{\beta}}$ y $F_{\gamma\beta}^{(0)\vec{\alpha}}$, que es nula. Existen entonces varias posibilidades:

- Si todas las raíces son diferentes entre sí e independientes, la única solución posible implica que las componentes $F_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\gamma}}$, $F_{\alpha\gamma}^{(0)\vec{\beta}}$ y $F_{\gamma\beta}^{(0)\vec{\alpha}}$ sean nulas para estas tres raíces. Es decir:

$$F_{\alpha\beta}^{(0)\vec{\gamma}} = F_{\alpha\gamma}^{(0)\vec{\beta}} = F_{\gamma\beta}^{(0)\vec{\alpha}} = 0, \quad \forall \{\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}\} \text{ independientes.} \quad (4.3.113)$$

- Si todas las raíces son diferentes entre sí pero no independientes, por ejemplo $\vec{\alpha} = m\vec{\beta} + r\vec{\gamma}$, con m y r constantes y necesariamente iguales a ± 1 en el caso de álgebras simplemente enlazadas, la situación cambia con respecto al caso anterior, convirtiéndose la ecuación (4.3.107) en la siguiente:

$$F_{(m\beta+r\gamma)\beta}^{(0)\vec{\gamma}} \gamma^A + F_{\gamma\beta}^{(0)\overline{m\beta+r\gamma}} (m\beta^A + r\gamma^A) + F_{\gamma(m\beta+r\gamma)}^{(0)\vec{\beta}} \beta^A = 0, \quad (4.3.114)$$

y, suponiendo que β y γ son independientes esta ecuación da lugar a las dos ligaduras siguientes:

$$F_{(m\beta+r\gamma)\beta}^{(0)\vec{\gamma}} = -rF_{\gamma\beta}^{(0)\overline{m\beta+r\gamma}} \quad \text{y} \quad F_{\gamma(m\beta+r\gamma)}^{(0)\vec{\beta}} = -mF_{\gamma\beta}^{(0)\overline{m\beta+r\gamma}}. \quad (4.3.115)$$

- Como caso particular del anterior podemos considerar $m = 1$, $r = 0$, es decir, $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$. Para este caso las ligaduras anteriores equivalen a:

$$F_{\beta\beta}^{(0)\vec{\gamma}} = 0, \quad (4.3.116)$$

y, si considerásemos $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ ó $\vec{\gamma} = \vec{\beta}$ obtendríamos:

$$F_{\beta\gamma}^{(0)\bar{\beta}} = F_{\gamma\beta}^{(0)\bar{\beta}} = 0, \quad (4.3.117)$$

en concordancia con (4.3.112).

Es evidente de todo lo anterior que si las tres raíces son iguales se cumple:

$$F_{\alpha\alpha}^{(0)\bar{\alpha}} = 0. \quad (4.3.118)$$

Pasemos ahora a considerar el caso particular $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$. Las soluciones (4.3.110) y (4.3.111) se reducen en este caso a las siguientes:

$$\widehat{R}_\alpha^{(0)A} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = 0, \quad \widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\beta}} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = -\frac{\delta_{\alpha\beta}}{(\hbar k)^3 (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})}, \quad (4.3.119)$$

$$\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = -\frac{\alpha^A}{2(\hbar k)^4 (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \delta_{\alpha\beta}, \quad \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)\bar{\gamma}} |_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = 0, \quad (4.3.120)$$

las mismas que obtendríamos si hubiésemos sustituido las soluciones (2.5.139), (2.5.140) y (2.5.141) en las ecuaciones (4.3.103), (4.3.104) y (4.3.105), en lugar de las soluciones generales (2.5.136), (2.5.137) y (2.5.138).

• **Relaciones entre las componentes $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}}$, $\widehat{F}_{\alpha\beta}^A$, $\widehat{R}_\alpha^{\bar{\gamma}}$ y \widehat{R}_α^A a nivel cuántico.**

Una vez estudiado el límite clásico pasaremos ya a buscar soluciones para las ecuaciones cuánticas (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100). Primeramente consideraremos la proyección en la CSA de estas ecuaciones. Como resultado de esa proyección las ecuaciones (4.3.91), (4.3.98) y (4.3.100) dan lugar, respectivamente a las tres siguientes:

$$\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} \gamma^A + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{\bar{\alpha}} \alpha^A + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\bar{\beta}} \beta^A = 0, \quad (4.3.121)$$

$$2\hbar(k + h_{g_0}^\vee - \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee}{4}) \widehat{F}_{\alpha\beta}^A - 2\hbar(\widehat{F}_{\alpha\beta}^B \cdot \alpha^B) \alpha^A = \widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}} \beta^A + \hbar \{ f^{\alpha\rho\delta} \widehat{F}_{\beta\rho}^{\bar{\delta}} + f^{\gamma\alpha\bar{\delta}} \widehat{F}_{\beta\delta}^{\bar{\gamma}} + f^{\gamma\beta\bar{\delta}} \widehat{F}_{\alpha\delta}^{\bar{\gamma}} \} \delta^A, \quad (4.3.122)$$

$$\begin{aligned} \hbar(k + h_{g_0}^\vee) \widehat{R}_\alpha^A &= \frac{\hbar}{2} \widehat{R}_\beta^{\bar{\xi}} f^{\xi\alpha\bar{\beta}} \beta^A + \frac{\hbar^2}{2} \left\{ f^{\alpha\rho\delta} \left\{ \widehat{F}_{\beta\rho}^{\bar{\xi}} f^{\xi\delta\bar{\beta}} + (\widehat{F}_{\beta\rho}^B \cdot \delta^B) \delta_{\bar{\delta}\bar{\beta}} \right\} + f^{\beta\rho\delta} f^{\xi\delta\bar{\beta}} \widehat{F}_{\alpha\rho}^{\bar{\xi}} + \right. \\ &+ 2f^{\bar{\xi}\rho\bar{\delta}} f^{\delta\rho\bar{\beta}} \widehat{F}_{\alpha\beta}^{\bar{\xi}} + 2f^{\bar{\xi}\beta\bar{\delta}} f^{\delta\rho\bar{\beta}} \widehat{F}_{\alpha\rho}^{\bar{\xi}} + 2f^{\bar{\xi}\alpha\bar{\delta}} f^{\delta\rho\bar{\beta}} \widehat{F}_{\beta\rho}^{\bar{\xi}} + 2f^{\alpha\rho\bar{\beta}} (\widehat{F}_{\beta\rho}^B \cdot \alpha^B) \left. \right\} \beta^A + \\ &+ 2\hbar^2 f^{\bar{\rho}\gamma\bar{\beta}} \left\{ (\widehat{F}_{\gamma\rho}^B \cdot \alpha^B) \delta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\bar{\xi}} f^{\xi\rho\bar{\beta}} + \widehat{F}_{\rho\gamma}^{\bar{\xi}} f^{\xi\alpha\bar{\beta}} + \widehat{F}_{\rho\alpha}^{\bar{\xi}} f^{\xi\gamma\bar{\beta}} \right\} \rho^A - \\ &- \frac{2\hbar^2}{3} f^{\xi\gamma\rho} f^{\beta\rho\alpha} \widehat{F}_{\beta\xi}^{\bar{\gamma}} \gamma^A. \end{aligned} \quad (4.3.123)$$

Como ya habíamos observado, (4.3.121) es exactamente la misma ecuación que (4.3.107).

Veamos ahora las ligaduras entre las componentes de $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_α que resultan de imponer que los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ satisfagan (4.3.79) y (4.3.80).

Empezaremos con el tensor $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$.

La ecuación (4.3.91) es equivalente, sin más que realizar los conmutadores y proyectar en $t^{\bar{\rho}}$, a la siguiente:

$$12 R_{\alpha\beta\gamma\rho} = \frac{(\widehat{F}_{\alpha\beta}^A \cdot \gamma^A) \delta_{\gamma\rho} + (\widehat{F}_{\alpha\gamma}^A \cdot \beta^A) \delta_{\beta\rho} + (\widehat{F}_{\gamma\beta}^A \cdot \alpha^A) \delta_{\alpha\rho}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} + \frac{\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\rho}} + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\xi} f^{\xi\beta\bar{\rho}} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{\xi} f^{\xi\alpha\bar{\rho}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})}, \quad (4.3.124)$$

expresión que es explícitamente simétrica en los índices α , β y γ pero no en el índice ρ . Puesto que el tensor $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ tiene que ser simétrico en todos sus índices, debemos imponer en la ecuación anterior las siguientes condiciones:

$$R_{\alpha\beta\gamma\rho} = R_{\rho\beta\gamma\alpha}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\rho} = R_{\alpha\gamma\rho\beta}, \quad R_{\alpha\beta\gamma\rho} = R_{\alpha\beta\rho\gamma}, \quad (4.3.125)$$

las cuales son equivalentes a las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} & (\widehat{F}_{\alpha\gamma}^A \delta_{\beta\rho} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^A \delta_{\alpha\rho}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) \rho^A - (\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \delta_{\beta\gamma} + \widehat{F}_{\beta\rho}^A \delta_{\alpha\gamma}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \gamma^A = \\ & = \widehat{F}_{\alpha\beta}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\rho}} (\vec{\lambda} \cdot \vec{\xi}) + (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{\xi} f^{\xi\beta\gamma} + \widehat{F}_{\beta\rho}^{\xi} f^{\xi\alpha\gamma}) - \\ & - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) (\widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\xi} f^{\xi\beta\bar{\rho}} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{\xi} f^{\xi\alpha\bar{\rho}}), \end{aligned} \quad (4.3.126)$$

$$\begin{aligned} & (\widehat{F}_{\alpha\beta}^A \delta_{\gamma\rho} + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^A \delta_{\beta\rho}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}) \rho^A - (\widehat{F}_{\beta\rho}^A \delta_{\alpha\gamma} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^A \delta_{\alpha\beta}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \alpha^A = \\ & = \widehat{F}_{\gamma\beta}^{\xi} f^{\xi\alpha\bar{\rho}} (\vec{\lambda} \cdot \vec{\xi}) + (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) (\widehat{F}_{\beta\rho}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\alpha}} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^{\xi} f^{\xi\beta\bar{\alpha}}) - \\ & - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}) (\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\rho}} + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\xi} f^{\xi\beta\bar{\rho}}), \end{aligned} \quad (4.3.127)$$

$$\begin{aligned} & (\widehat{F}_{\alpha\beta}^A \delta_{\gamma\rho} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^A \delta_{\alpha\rho}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \rho^A - (\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \delta_{\beta\gamma} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^A \delta_{\alpha\beta}) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \beta^A = \\ & = \widehat{F}_{\gamma\alpha}^{\xi} f^{\xi\beta\bar{\rho}} (\vec{\lambda} \cdot \vec{\xi}) + (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\beta}} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^{\xi} f^{\xi\alpha\bar{\beta}}) - \\ & - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) (\widehat{F}_{\alpha\beta}^{\xi} f^{\xi\gamma\bar{\rho}} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{\xi} f^{\xi\alpha\bar{\rho}}). \end{aligned} \quad (4.3.128)$$

Estas tres igualdades son válidas para cada conjunto de raíces $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\rho})$ positivas fijas.

Si ahora tomamos en (4.3.126), $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ obtenemos una relación más sencilla que es la siguiente:

$$(\widehat{F}_{\alpha\gamma}^A \cdot \rho^A) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) \delta_{\alpha\rho} - (\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \gamma^A) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\alpha\gamma} = (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) f^{\xi\alpha\bar{\gamma}} \widehat{F}_{\alpha\rho}^{\xi} - (\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) f^{\xi\alpha\bar{\rho}} \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{\xi}, \quad (4.3.129)$$

que, particularizada al caso $\vec{\alpha} = \vec{\gamma}$ nos da la siguiente igualdad:

$$(\hat{F}_{\alpha\alpha}^A \cdot \rho^A)(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})\delta_{\alpha\rho} = (\hat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \alpha^A)(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}). \quad (4.3.130)$$

De nuevo hemos de hacer la observación de que todas estas ecuaciones deben cumplirse también a nivel clásico, y, efectivamente, es posible comprobar que las soluciones $\hat{F}_{\alpha\rho}^{(0)}$ obtenidas en el apartado anterior las satisfacen.

Consideremos ahora el tensor $P_{\alpha\beta\gamma}$. La ecuación (4.3.101) es explícitamente simétrica en α y β , por lo tanto cumple automáticamente la primera condición que aparece en (4.3.79) para $P_{\alpha\beta\gamma}$.

La segunda condición que debe cumplir $P_{\alpha\beta\gamma}$ aparece en (4.3.80) y se traduce en la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \frac{F_{\alpha\beta}^{\vec{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{F_{\alpha\gamma}^{\vec{\beta}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{F_{\gamma\beta}^{\vec{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \frac{(\hat{R}_{\alpha}^A \cdot \beta^A)\delta_{\vec{\beta}\vec{\gamma}} + (\hat{R}_{\beta}^A \cdot \alpha^A)\delta_{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \\ & + \frac{(\hat{R}_{\alpha}^A \cdot \gamma^A)\delta_{\vec{\beta}\vec{\gamma}} + (\hat{R}_{\gamma}^A \cdot \alpha^A)\delta_{\vec{\alpha}\vec{\beta}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{(\hat{R}_{\gamma}^A \cdot \beta^A)\delta_{\vec{\beta}\vec{\alpha}} + (\hat{R}_{\beta}^A \cdot \gamma^A)\delta_{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \\ & + \frac{\hat{R}_{\alpha}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\beta\gamma} + \hat{R}_{\beta}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\alpha\gamma}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{\hat{R}_{\alpha}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\gamma\beta} + \hat{R}_{\gamma}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\alpha\beta}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{\hat{R}_{\gamma}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\beta\alpha} + \hat{R}_{\beta}^{\vec{\xi}} f^{\vec{\xi}\gamma\alpha}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \\ & + \hbar \left\{ \frac{f^{\alpha\rho\gamma}(\hat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \gamma^A) + f^{\beta\rho\gamma}(\hat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + 2 \frac{f^{\alpha\rho\vec{\gamma}}(\hat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\beta\rho\vec{\gamma}}(\hat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \right. \\ & + \frac{f^{\alpha\rho\beta}(\hat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \beta^A) + f^{\gamma\rho\beta}(\hat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + 2 \frac{f^{\alpha\rho\vec{\beta}}(\hat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\gamma\rho\vec{\beta}}(\hat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\ & + \frac{f^{\gamma\rho\alpha}(\hat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\beta\rho\alpha}(\hat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + 2 \frac{f^{\gamma\rho\vec{\alpha}}(\hat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \gamma^A) + f^{\beta\rho\vec{\alpha}}(\hat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \\ & + \frac{f^{\alpha\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\gamma}} \hat{F}_{\beta\rho}^{\vec{\xi}} + f^{\beta\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\gamma}} \hat{F}_{\alpha\rho}^{\vec{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{f^{\alpha\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\beta}} \hat{F}_{\gamma\rho}^{\vec{\xi}} + f^{\gamma\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\beta}} \hat{F}_{\alpha\rho}^{\vec{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\ & + \frac{f^{\gamma\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\alpha}} \hat{F}_{\beta\rho}^{\vec{\xi}} + f^{\beta\rho\delta} f^{\vec{\xi}\delta\vec{\alpha}} \hat{F}_{\gamma\rho}^{\vec{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + 2 \frac{f^{\xi\beta\delta} f^{\delta\rho\vec{\gamma}} \hat{F}_{\alpha\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\alpha\rho}^{\vec{\beta}} (\vec{\beta} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \\ & + 2 \frac{f^{\xi\alpha\delta} f^{\delta\rho\vec{\gamma}} \hat{F}_{\beta\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\beta\rho}^{\vec{\alpha}} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\gamma}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + 2 \frac{f^{\xi\gamma\delta} f^{\delta\rho\vec{\beta}} \hat{F}_{\alpha\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\alpha\rho}^{\vec{\gamma}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\beta}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\ & + 2 \frac{f^{\xi\alpha\delta} f^{\delta\rho\vec{\beta}} \hat{F}_{\gamma\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\gamma\rho}^{\vec{\alpha}} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\beta}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + 2 \frac{f^{\xi\beta\delta} f^{\delta\rho\vec{\alpha}} \hat{F}_{\gamma\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\gamma\rho}^{\vec{\beta}} (\vec{\beta} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \\ & + 2 \frac{f^{\xi\gamma\delta} f^{\delta\rho\vec{\alpha}} \hat{F}_{\beta\rho}^{\xi} - \hat{F}_{\beta\rho}^{\vec{\gamma}} (\vec{\gamma} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\vec{\rho}\vec{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + 2 \frac{f^{\xi\rho\delta} f^{\delta\rho\vec{\gamma}} \hat{F}_{\alpha\beta}^{\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + 2 \frac{f^{\xi\rho\delta} f^{\delta\rho\vec{\beta}} \hat{F}_{\alpha\gamma}^{\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\ & \left. + 2 \frac{f^{\xi\rho\delta} f^{\delta\rho\vec{\alpha}} \hat{F}_{\gamma\beta}^{\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = 0. \quad (4.3.131) \end{aligned}$$

Finalmente, si queremos obtener tensores $Q_{\alpha\rho}$ totalmente simétricos, la ecuación (4.3.100) nos conduce a la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & \hbar(k + h_{g_0}^\vee) \left\{ \frac{\widehat{R}_\rho^{\bar{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} - \frac{\widehat{R}_\alpha^{\bar{\rho}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \right\} - \hbar \{ P_{\beta\alpha\gamma} f^{\beta\gamma\rho} - P_{\beta\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \} + \\ & + \hbar(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \left\{ \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}}(P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\alpha})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}(P_{\rho\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\rho})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = \\ & = 2\hbar^2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \left\{ \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\alpha}} R_{\rho\beta\gamma\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} R_{\alpha\beta\gamma\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \right\} - \\ & - \frac{2\hbar^2}{3} \left\{ f^{\xi\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \rho^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - f^{\xi\alpha\gamma} f^{\beta\gamma\rho} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\}. \quad (4.3.132) \end{aligned}$$

En resumen, cualquier conjunto de soluciones $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\rho}$ que nos den una densidad conservada de spin 4, $I_4(z)$, han de estar dadas en función de dos tensores $F_{\alpha\beta}$ y R_α que satisfagan las ligaduras (4.3.121), (4.3.122), (4.3.123), (4.3.125), (4.3.131) y (4.3.132). Es pues evidente que las posibles soluciones para estos tensores están fuertemente restringidas.

• **Obtención de una solución para $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_α a nivel cuántico.**

Conocidas ya las soluciones generales $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\widehat{R}_\alpha^{(0)}$ de las ecuaciones (4.3.103), (4.3.104) y (4.3.105), nuestro interés se centrará ahora en la obtención de, al menos una solución a nivel cuántico para estos tensores, es decir, una solución de (4.3.121), (4.3.122), (4.3.123), (4.3.125), (4.3.131) y (4.3.132).

Puesto que el conjunto de ecuaciones a resolver es muy complejo, trataremos de tomar como punto de partida aquellas hipótesis que nos permitan una mayor simplificación de dichas ecuaciones. Como hemos visto que las soluciones clásicas para $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}$ y $\widehat{R}_\alpha^{(0)}$ con $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$ son especialmente sencillas vamos a suponer que existe una solución a nivel cuántico, tal que:

$$\widehat{F}_{\alpha\beta} = \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)}|_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}}. \quad (4.3.133)$$

En este caso, las ecuaciones (4.3.122) y (4.3.123), se simplifican a:

$$2\hbar(k + h_{g_0}^\vee - \frac{\Psi^2 h_g^\vee}{4}) \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A} - 2\hbar(\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)B} \cdot \alpha^B) \alpha^A = \widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}} \beta^A, \quad (4.3.134)$$

$$\hbar(k + h_{g_0}^\vee) \widehat{R}_\alpha^A = \frac{\hbar}{2} \widehat{R}_\beta^{\bar{\xi}} f^{\bar{\xi}\alpha\bar{\beta}} \beta^A. \quad (4.3.135)$$

La ecuación (4.3.134) nos da como solución para $\widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}}$ una expresión de la forma:

$$(\hbar k)^3 \widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}} = (\hbar k)^3 \left\{ \widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\beta}} + \frac{\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\beta}}}{k} \right\}, \quad (4.3.136)$$

donde $\widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\beta}}$ es la solución clásica para $\vec{\mu} = \vec{\lambda}$ y la corrección cuántica $\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\beta}}$ es de la forma:

$$\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\beta}} = \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee - 4h_{g_0}^\vee + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})}{4(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \delta_{\alpha\beta}. \quad (4.3.137)$$

Cuando sustituimos la solución anterior para $\widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}}$ en la ecuación (4.3.135) ésta se reduce a la siguiente igualdad:

$$\hbar(k + h_{g_0}^\vee) \widehat{R}_\alpha^A = 0, \quad (4.3.138)$$

la cual admite como única solución:

$$\widehat{R}_\alpha^A = \widehat{R}_\alpha^{(0)A} = 0. \quad (4.3.139)$$

Pero estas soluciones deben satisfacer también las condiciones (4.3.126), (4.3.127), (4.3.128), (4.3.131) y (4.3.132), las cuales para este caso, sustituyendo $\widehat{R}_\alpha^A = \widehat{F}_{\alpha\beta}^{\bar{\gamma}} = 0$ y $\widehat{F}_{\alpha\beta}^A = \widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A}|_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}}$, se reducen a:

$$\left(\widehat{F}_{\alpha\gamma}^{(0)A} \delta_{\beta\rho} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^{(0)A} \delta_{\alpha\rho}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) \rho^A - \left(\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \delta_{\beta\gamma} + \widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \delta_{\alpha\gamma}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \gamma^A = 0, \quad (4.3.140)$$

$$\left(\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A} \delta_{\gamma\rho} + \widehat{F}_{\alpha\gamma}^{(0)A} \delta_{\beta\rho}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha}) \rho^A - \left(\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \delta_{\alpha\gamma} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \delta_{\alpha\beta}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \alpha^A = 0, \quad (4.3.141)$$

$$\left(\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A} \delta_{\gamma\rho} + \widehat{F}_{\beta\gamma}^A \delta_{\alpha\rho}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) \rho^A - \left(\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \delta_{\beta\gamma} + \widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \delta_{\alpha\beta}\right) (\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) \beta^A = 0, \quad (4.3.142)$$

para (4.3.126), (4.3.127) y (4.3.128), mientras que, para (4.3.131), tenemos:

$$\begin{aligned} & \hbar \left\{ \frac{f^{\alpha\rho\gamma} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A) + f^{\beta\rho\gamma} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + 2 \frac{f^{\bar{\alpha}\rho\bar{\gamma}} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \alpha^A) + f^{\bar{\beta}\rho\bar{\gamma}} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \right. \\ & + \frac{f^{\alpha\rho\beta} (\widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \cdot \beta^A) + f^{\gamma\rho\beta} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + 2 \frac{f^{\bar{\alpha}\rho\bar{\beta}} (\widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \cdot \alpha^A) + f^{\bar{\gamma}\rho\bar{\beta}} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\ & \left. + \frac{f^{\gamma\rho\alpha} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \alpha^A) + f^{\beta\rho\alpha} (\widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + 2 \frac{f^{\bar{\gamma}\rho\bar{\alpha}} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A) + f^{\bar{\beta}\rho\bar{\alpha}} (\widehat{F}_{\gamma\rho}^{(0)A} \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = \\ & = \frac{\widehat{R}_\alpha^{\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{\widehat{R}_\alpha^{\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\xi}} + \widehat{R}_\gamma^{\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{\widehat{R}_\gamma^{\bar{\xi}} f^{\bar{\alpha}\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{\bar{\xi}} f^{\bar{\alpha}\gamma\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})}, \quad (4.3.143) \end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que conocemos la forma de los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_α que queremos sean solución de esta ecuación podemos descomponerla en dos igualdades, separando la parte de orden 0 en $1/k$ y la parte de orden $1/k$. Tales igualdades son:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{\widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\xi}} + \widehat{R}_\gamma^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{\widehat{R}_\gamma^{(0)\bar{\xi}} f^{\alpha\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{(0)\bar{\xi}} f^{\alpha\gamma\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} = \\
 & = \hbar \left\{ \frac{f^{\alpha\rho\gamma}(\widehat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \gamma^A) + f^{\beta\rho\gamma}(\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + 2 \frac{f^{\bar{\alpha}\rho\bar{\gamma}}(\widehat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\bar{\beta}\rho\bar{\gamma}}(\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \right. \\
 & + \frac{f^{\alpha\rho\beta}(\widehat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \beta^A) + f^{\gamma\rho\beta}(\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + 2 \frac{f^{\bar{\alpha}\rho\bar{\beta}}(\widehat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\bar{\gamma}\rho\bar{\beta}}(\widehat{F}_{\alpha\rho}^A \cdot \gamma^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \\
 & \left. + \frac{f^{\gamma\rho\alpha}(\widehat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \alpha^A) + f^{\beta\rho\alpha}(\widehat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + 2 \frac{f^{\bar{\gamma}\rho\bar{\alpha}}(\widehat{F}_{\beta\rho}^A \cdot \gamma^A) + f^{\bar{\beta}\rho\bar{\alpha}}(\widehat{F}_{\gamma\rho}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} \quad (4.3.144)
 \end{aligned}$$

para la parte de orden 0 en $1/k$, y

$$\frac{\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\gamma}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} + \frac{\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\xi}} + \widehat{R}_\gamma^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\alpha\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} + \frac{\widehat{R}_\gamma^{(1)\bar{\xi}} f^{\alpha\beta\bar{\xi}} + \widehat{R}_\beta^{(1)\bar{\xi}} f^{\alpha\gamma\bar{\xi}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} = 0, \quad (4.3.145)$$

para la parte de orden 1.

Finalmente la ecuación (4.3.131) se convierte en la siguiente:

$$\begin{aligned}
 & (\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})(\hbar k)^3 \left\{ \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}}(P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\alpha})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}(P_{\rho\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\rho})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = \\
 & = -\frac{2}{3k}(\hbar k)^4 \left\{ f^{\xi\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \rho^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - f^{\xi\alpha\gamma} f^{\beta\gamma\rho} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} + \\
 & \frac{2}{k}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})(\hbar k)^4 \left\{ \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\alpha}} R_{\rho\beta\gamma\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} - \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} R_{\alpha\beta\gamma\xi}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \right\} + \\
 & + (\hbar k)^3 \left\{ P_{\beta\alpha\gamma} f^{\beta\gamma\rho} - P_{\beta\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \right\}, \quad (4.3.146)
 \end{aligned}$$

y, de nuevo, esta última ecuación, que es la condición de simetría del tensor $Q_{\alpha\rho}$, puede descomponerse en dos ecuaciones, al tomar por separado los términos de orden $1/k$ y los de orden 1. Para hacer esto hemos de expresar previamente la ecuación en función de los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_α . Obtenemos así:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\xi}\beta\bar{\gamma}}}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ \frac{\widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{\widehat{R}_\rho^{(0)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = \frac{1}{6(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ f^{\bar{\xi}\beta\bar{\gamma}} \left\{ \widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\xi}} f^{\beta\gamma\rho} - \widehat{R}_\rho^{\bar{\xi}} f^{\beta\gamma\alpha} \right\} + \right. \\
 & \left. + \widehat{R}_\beta^{(0)\bar{\xi}} \left\{ f^{\bar{\xi}\alpha\bar{\gamma}} f^{\beta\gamma\rho} - f^{\bar{\xi}\rho\bar{\gamma}} f^{\beta\gamma\alpha} \right\} \right\}, \quad (4.3.147)
 \end{aligned}$$

a orden 0 y

$$\frac{1}{6(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ f^{\beta\xi\gamma} \left\{ f^{\beta\gamma\rho}(\widehat{F}_{\alpha\xi}^{(0)A} \cdot \gamma^A) - f^{\beta\gamma\alpha}(\widehat{F}_{\rho\xi}^{(0)A} \cdot \gamma^A) \right\} + 2 f^{\bar{\beta}\xi\bar{\gamma}} \left\{ f^{\beta\gamma\rho}(\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \alpha^A) - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& -f^{\beta\gamma\alpha}(\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \rho^A) \} + f^{\bar{\xi}\beta\bar{\gamma}} \{ \widehat{R}_{\alpha}^{(1)\bar{\xi}} f^{\beta\gamma\rho} - \widehat{R}_{\rho}^{(1)\bar{\xi}} f^{\beta\gamma\alpha} \} + \widehat{R}_{\beta}^{(1)\bar{\xi}} \{ f^{\bar{\xi}\alpha\bar{\gamma}} f^{\beta\gamma\rho} - \\
& \quad - f^{\bar{\xi}\rho\bar{\gamma}} f^{\beta\gamma\alpha} \} \} + \frac{2}{3} \left\{ f^{\xi\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \rho^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - f^{\xi\alpha\gamma} f^{\beta\gamma\rho} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} = \\
& = \frac{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ (\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \gamma^A) \left\{ \frac{f^{\alpha\xi\gamma}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{f^{\rho\xi\gamma}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} + f^{\bar{\beta}\xi\bar{\gamma}} \left\{ \frac{(\widehat{F}_{\alpha\xi}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{(\widehat{F}_{\rho\xi}^A \cdot \beta^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} + \right. \\
& \quad \left. + f^{\bar{\alpha}\xi\bar{\gamma}} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \alpha^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - f^{\bar{\rho}\xi\bar{\gamma}} \frac{(\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \rho^A)}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\xi}} \left\{ \frac{\widehat{R}_{\alpha}^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} - \frac{\widehat{R}_{\rho}^{(1)\bar{\xi}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \right\} \right\} + \\
& \quad + \frac{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}}}{6(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \left\{ (\widehat{F}_{\beta\xi}^A \cdot \gamma^A) \{ f^{\bar{\delta}\xi\bar{\alpha}} \delta_{\gamma\bar{\rho}} - f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} \delta_{\gamma\bar{\alpha}} \} + \right. \\
& \quad \left. + (\widehat{F}_{\xi\gamma}^A \cdot \beta^A) \{ f^{\bar{\delta}\xi\bar{\alpha}} \delta_{\beta\bar{\rho}} - f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} \delta_{\beta\bar{\alpha}} \} \right\}, \quad (4.3.148)
\end{aligned}$$

a orden $1/k$.

Si en todas estas ecuaciones sustituimos las expresiones explícitas de $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A}|_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}}$ y de $R_{\alpha}^{\bar{\xi}}$, es relativamente sencillo comprobar que efectivamente se satisfacen, es decir, que la solución particular obtenida para los tensores $\widehat{F}_{\alpha\beta}$ y \widehat{R}_{α} a nivel cuántico satisface todas las condiciones necesarias para que los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ obtenidos a partir de ella nos den una densidad conservada de spin 4. Esto nos basta para poder concluir el carácter integrable de los modelos split.

• **Obtención de una solución para $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$.**

Como último objetivo en este capítulo nos queda únicamente la obtención de los tensores $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$, $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$ correspondientes a la solución dada por (4.3.133), (4.3.136) y (4.3.139) que hemos obtenido en la sección anterior.

Para el primero obtenemos,

$$(\hbar k)^4 R_{\alpha\beta\gamma\rho}|_{\vec{\mu}=\vec{\lambda}} = \frac{-1}{24(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} \left\{ \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \{ \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\rho} + \delta_{\alpha\rho} \delta_{\gamma\beta} \} + \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\rho} \right\}, \quad (4.3.149)$$

resultado ya conocido, pues coincide con la solución clásica (2.5.139).

En cuanto a $P_{\alpha\beta\gamma}$, la ecuación (4.3.101) nos da la relación

$$\begin{aligned}
-6 P_{\alpha\beta\gamma}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma}) & = \widehat{R}_{\alpha}^{\bar{\xi}} f^{\bar{\xi}\beta\bar{\gamma}} + \widehat{R}_{\beta}^{\bar{\xi}} f^{\bar{\xi}\alpha\bar{\gamma}} + \hbar \left\{ f^{\alpha\rho\gamma} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A) + 2 f^{\bar{\alpha}\rho\bar{\gamma}} (\widehat{F}_{\beta\rho}^{(0)A} \cdot \alpha^A) + \right. \\
& \quad \left. + f^{\beta\rho\gamma} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \gamma^A) + 2 f^{\bar{\beta}\rho\bar{\gamma}} (\widehat{F}_{\alpha\rho}^{(0)A} \cdot \beta^A) \right\}. \quad (4.3.150)
\end{aligned}$$

Sustituyendo ahora las soluciones $\widehat{F}_{\alpha\beta}^{(0)A}$ y $\widehat{R}_{\alpha}^{\bar{\gamma}}$ obtenemos:

$$(\hbar k)^3 P_{\alpha\beta\gamma} = -m^3 \left\{ P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} + \frac{1}{k} P_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} \right\}, \quad (4.3.151)$$

donde $P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)}$ es la solución clásica dada por (2.5.140) y $P_{\alpha\beta\gamma}^{(1)}$ viene dado por:

$$-m^3 P_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} = \frac{1}{6(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ \left\{ \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee - 4h_{g_0}^\vee}{4} \right\} \left\{ \frac{f^{\bar{\alpha}\beta\gamma}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} + \frac{f^{\bar{\beta}\alpha\gamma}}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{3f^{\alpha\beta\gamma}}{2} \left\{ \frac{(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} - \frac{(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \right\} \right\}. \quad (4.3.152)$$

Finalmente, de acuerdo con (4.3.100), el tensor $Q_{\alpha\beta}$ satisface:

$$-2(\hbar k)^2 Q_{\alpha\rho}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) = -(\hbar k)^2 R_\alpha^\rho + \frac{(\hbar k)^3}{k} \left\{ (P_{\alpha\beta\gamma} - P_{\gamma\beta\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} + \right. \\ \left. + P_{\beta\rho\gamma}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho}) f^{\beta\gamma\alpha} \right\} + \frac{2(\hbar k)^4}{k^2} \left\{ R_{\alpha\beta\gamma\xi}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} - \right. \\ \left. - R_{\alpha\beta\gamma\rho}(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})(\vec{\beta} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\beta\gamma} - \frac{1}{6}(\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \rho^A) f^{\xi\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} \right\}, \quad (4.3.153)$$

sustituyendo los resultados anteriores para $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ y los valores de los tensores $\widehat{R}_\alpha^{\bar{\beta}}$ y $\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A}$ dados por (4.3.136) y (4.3.120) obtenemos:

$$(\hbar k)^2 Q_{\alpha\rho} = m^3 \left\{ Q_{\alpha\rho}^{(0)} + \frac{1}{k} Q_{\alpha\rho}^{(1)} + \frac{1}{k^2} Q_{\alpha\rho}^{(2)} \right\}, \quad (4.3.154)$$

donde la primera contribución es la solución clásica (2.5.141) y las correcciones vienen dadas por:

$$m^3 Q_{\alpha\rho}^{(1)} = \frac{(\hbar k)^3}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} (\widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\rho}} + h_{g_0}^\vee \widehat{R}_\alpha^{(0)\bar{\rho}}) + \frac{m^3}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} (P_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} - P_{\gamma\beta\alpha}^{(0)})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} + \\ + \frac{m^3}{2} P_{\beta\gamma\rho}^{(0)} f^{\beta\gamma\alpha} = \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee - 8h_{g_0}^\vee + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})}{8(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} \delta_{\alpha\rho} + \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}}{4(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})}, \quad (4.3.155)$$

$$m^3 Q_{\alpha\rho}^{(2)} = \frac{(\hbar k)^3}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} h_{g_0}^\vee \widehat{R}_\alpha^{(1)\bar{\rho}} + \frac{m^3}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} (P_{\alpha\beta\gamma}^{(1)} - P_{\gamma\beta\alpha}^{(1)})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta}) f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} + \\ + \frac{m^3}{2} P_{\beta\gamma\rho}^{(1)} f^{\beta\gamma\alpha} - \frac{m^3(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \left\{ R_{\alpha\beta\gamma\xi}^{(0)} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\delta}} f^{\bar{\delta}\xi\bar{\rho}} - R_{\alpha\beta\gamma\rho}^{(0)}(\vec{\beta} \cdot \vec{\rho}) \delta_{\beta\gamma} \right\} + \\ + \frac{(\hbar k)^4}{6(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} (\widehat{F}_{\beta\xi}^{(0)A} \cdot \rho^A) f^{\xi\rho\gamma} f^{\beta\gamma\alpha} = h_{g_0}^\vee \frac{\Psi_g^2 h_g^\vee - 4h_{g_0}^\vee + 4(\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha})}{8(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})^2} \delta_{\alpha\rho} + \\ + \frac{f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}}}{4(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} \left\{ \frac{(\Psi_g^2 h_g^\vee - 4h_{g_0}^\vee)}{4} - \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\gamma})}{3} - \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})}{2(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \right\} - \\ - \frac{2(\vec{\rho} \cdot \vec{\rho})^2 + (\vec{\beta} \cdot \vec{\rho})^2}{24(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})^2} \delta_{\alpha\rho} - \frac{f^{\beta\gamma\rho} f^{\beta\gamma\alpha}}{8(\vec{\lambda} \cdot \vec{\gamma})} \left\{ \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\rho})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})} + \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\alpha})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})} - \frac{(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta})}{(\vec{\lambda} \cdot \vec{\beta})} \right\} + \\ + \frac{5(\vec{\gamma} \cdot \vec{\beta}) \{ f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\rho}} f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\alpha}} + f^{\bar{\beta}\gamma\bar{\alpha}} f^{\bar{\gamma}\beta\bar{\rho}} \}}{48(\vec{\lambda} \cdot \vec{\alpha})(\vec{\lambda} \cdot \vec{\rho})}. \quad (4.3.156)$$

Como exige el cumplimiento de (4.3.132), tanto $Q_{\alpha\rho}^{(1)}$ como $Q_{\alpha\rho}^{(2)}$ son explícitamente simétricos en α y ρ .

La conclusión fundamental de este capítulo es que los modelos split son integrables a nivel cuántico, lo que queda garantizado la existencia de (al menos) $rank(G)$ densidades conservadas de spin 2, y, por lo tanto, de otras tantas de spin -2 y de una densidad conservada de spin 4 y otra de spin -4 . Estas condiciones garantizan la integrabilidad cuántica de cualquier teoría 1+1-dimensional y masiva, cuya matriz-S sea analítica, de acuerdo con el argumento de Parke explicado en la introducción de este capítulo.

Capítulo 5

Conclusiones.

En este trabajo hemos estudiado la integrabilidad clásica y cuántica y la clasificación de un conjunto de modelos que constituyen ejemplos particulares de las denominadas teorías de Toda no abelianas. Tales teorías pueden ser caracterizadas mediante una acción que se expresa como la suma de la acción de WZW y de una perturbación dada por un campo primario de esta CFT.

La construcción de las teorías de Toda no abelianas implica la elección de tres elementos: un álgebra de Lie \bar{g} , un automorfismo σ que induce en \bar{g} una gradación tal que el campo de la teoría toma valores en el grupo asociado a la subálgebra invariante bajo σ y dos elementos semisimples constantes Λ_{\pm} , que toman valores en los subespacios \bar{g}_k y \bar{g}_{N-k} , siendo k cierto entero positivo comprendido entre 0 y $N - 1$, y N el orden del automorfismo σ . En principio, cualquier elección de $\{\bar{g}, \sigma, \Lambda_{\pm}\}$ tiene perfecto sentido, pero si deseamos estudiar modelos cuya acción sea real y positiva deberemos tomar una forma real del grupo G_0 en el cual toma valores el campo $h(x, t)$ y, en particular, salvo que G_0 sea abeliano, dicha forma real debe ser la forma real compacta si queremos asegurarnos de que la energía cinética tenga signo definido. Además nos interesan modelos puramente masivos, es decir, que admitan una descripción en términos de la matriz-S.

Cuando se imponen todas estas condiciones se observa que existen únicamente dos familias de teorías de Toda no abelianas que las satisfacen. Estos dos tipos de teorías son los modelos *Homogéneos de sine-Gordon* (HSG) y los modelos de *sine-Gordon asociados a Espacios Simétricos* (SSSG).

Las teorías HSG corresponden al automorfismo identidad y, por lo tanto, $g = g_0$ y $\Lambda_{\pm} \in g_0$. En este caso Λ_{\pm} son necesariamente elementos regulares de g_0 , lo cual significa que $Ker(ad\Lambda)|_g = CSA$. Las teorías HSG describen perturbaciones de teorías parafermiónicas asociadas con cosets de la forma $G_0/U(1)^{r_g}$ donde r_g es la dimensión de la CSA.

Por su parte, los modelos SSSG corresponden a automorfismos involutivos $\sigma^2 = I$ de g , bajo los cuales $g = g_0 \oplus g_1$. Como primera clasificación de los modelos SSSG se distingue entre los de tipo I y los de tipo II, aunque en este trabajo sólo nos hemos interesado por los de tipo I, para los cuales g es un álgebra de Lie real, compacta, finita y simple.

Para estos modelos $\Lambda_{\pm} \in g_1$ y ya no están obligados a ser elementos regulares de g . Si lo son, se verificará, como en el caso de los modelos HSG, que $Ker(ad\Lambda)|_g = CSA$,

pero, dentro de esta posibilidad, puede que la CSA esté contenida totalmente en el subconjunto g_1 de g o que tenga parte en g_1 y parte en g_0 . Si se da la primera de estas dos situaciones los modelos resultantes son los que hemos denominado *Modelos Split* los cuales se caracterizan por ser perturbaciones masivas del modelo de WZW correspondiente al grupo G_0 .

Repasada esta clasificación pasamos ya a enumerar las principales conclusiones de esta tesina:

- Tras haber hecho una descripción detallada de las características generales de los modelos SSSG, en función de la naturaleza regular ó no regular de los elementos Λ_{\pm} , hemos centrado nuestro interés en un subgrupo de éstos, al que hemos denominado “**Modelos Split**”.

Los modelos split se definen como el conjunto de modelos SSSG de tipo I asociados con elementos Λ_{\pm} regulares correspondientes a los espacios simétricos compactos G/G_0 de rango maximal, es decir, aquellos cuyo rango coincide con el rango del grupo G y que son los que se presentan en la siguiente tabla:

	G/G_0	rango(G/G_0)	dimensión(G/G_0)
A I	$SU(n)/SO(n)$	$n - 1$	$\frac{1}{2}(n - 1)(n + 2)$
BD I	$SO(2n)/SO(n) \times SO(n)$	n	n^2
BD I	$SO(2n + 1)/SO(n) \times SO(n + 1)$	n	$n(n + 1)$
C I	$Sp(n)/U(n)$	n	$n(n + 1)$
E I	$E_6/Sp(4)$	6	42
E V	$E_7/SU(8)$	7	70
E VIII	$E_8/SO(16)$	8	128
F I	$F_4/Sp(3) \times SU(2)$	4	28
G	$G_2/SU(2) \times SU(2)$	2	8

Tabla 5.1: *Espacios simétricos que dan lugar a Modelos Split.*

Estos modelos se caracterizan por ser perturbaciones masivas del modelo de WZW correspondiente al grupo G_0 .

- Hemos encontrado el espectro de partículas fundamentales correspondiente a los modelos split. Éste se caracteriza por la existencia de una partícula fundamental descrita por un campo real por cada raíz positiva $\vec{\alpha}$ de \bar{g} . La masa de esta partícula es:

$$m_{\alpha}^2 = 4m^2(\vec{\alpha} \cdot \Lambda_+)(\vec{\alpha} \cdot \tilde{\Lambda}_-), \quad (5.0.1)$$

siendo $\tilde{\Lambda}_- = h_0^{\dagger} \Lambda_- h_0$.

- Hemos construido algunas de las soluciones solitónicas correspondientes a los modelos split mediante el “embedding” de solitones tipo sine–Gordon en G_0 .

Al igual que las partículas fundamentales de la teoría, los solitones así construidos están asociados con las raíces positivas de \bar{g} . En particular, por cada una de estas raíces hemos encontrado un espectro de solitones correspondientes al solitón, antisolitón y “breathers” del modelo de sine–Gordon ordinario.

Desde un punto de vista topológico, las soluciones solitónicas obtenidas para los modelos split están asociadas con campos $h(x, t)$ cuyo comportamiento asintótico (cuando $x \rightarrow \pm\infty$) es $h(\pm\infty, t) = h_0^\pm \in M_0$, siendo M_0 el conjunto de vacíos de la teoría, el cual es un grupo discreto y abeliano, y h_0^\pm dos elementos fijos de este conjunto.

Por lo tanto, los campos $h(x, t)$ solitónicos representan trayectorias en G_0 que conectan dos vacíos de la teoría. Estos vacíos son diferentes para el solitón y antisolitón, coincidiendo para los “breathers”.

De acuerdo con lo anterior, es posible asignar a los solitones construidos una carga topológica definida como:

$$h^\dagger(-\infty, t)h(+\infty, t) \in M_0, \quad (5.0.2)$$

la cual resulta coincidir para un solitón y un antisolitón correspondientes a la misma raíz $\vec{\alpha}$.

Sin embargo, la caracterización anterior es incompleta pues si $\pi_1(G_0)$ es el grupo fundamental de homotopía de G_0 sabemos que si $\pi_1(G_0) \neq \{0\}$ no todas las trayectorias en G_0 que conectan dos puntos de dicho grupo son homotópicamente equivalentes sino que existen tantas clases de homotopía o tipos de trayectorias no equivalentes como elementos en el grupo $\pi_1(G_0)$. Así pues, cada uno de los solitones construidos lleva asociada, no sólo una carga topológica del tipo (5.0.2), sino también una clase de homotopía de $\pi_1(G_0)$. En particular, el solitón y antisolitón correspondientes a una misma raíz $\vec{\alpha}$ podrían ser diferenciados sólo si $\pi_1(G_0) \neq \{0\}$, pues sus cargas topológicas (5.0.2) coinciden.

- Hemos llevado a cabo una clasificación de los modelos split, determinando las dimensiones conformes de las perturbaciones. Para ello nos hemos basado en la correspondencia existente entre automorfismos involutivos de \bar{g} y espacios simétricos de tipo I, entre los cuales están los de rango maximal correspondientes a los modelos split.
- Finalmente, hemos estudiado la integrabilidad cuántica de los modelos split basándonos fundamentalmente en dos resultados:
 - El argumento presentado por Parke en [13], según el cual la integrabilidad cuántica de cualquier teoría masiva con matriz–S analítica en 1+1 dimensiones queda asegurada si se comprueba la existencia de al menos dos densidades conservadas de spin superior diferente tanto en módulo como en signo.
 - El método de Zamolodchikov [20], que permite determinar cuáles de las infinitas densidades conservadas existentes en una CFT lo siguen siendo cuando

la teoría es perturbada mediante un campo primario de la propia CFT. Tal construcción asume aceptar una serie de condiciones como son que el conjunto de campos de la teoría perturbada coincide con el de la teoría original y se simplifica especialmente si se consideran teorías super-renormalizables a primer orden.

Utilizando estos dos resultados, hemos comprobado la existencia de, al menos, $rank(g)$ densidades conservadas de spin ± 2 y de una densidad conservada de spin 4 y otra de spin -4 , que resultan de la renormalización de las correspondientes densidades conservadas clásicamente del mismo spin que también hemos obtenido.

De acuerdo con el argumento de Parke, estos resultados permiten concluir que los modelos split son también integrables cuánticamente.

Apéndice A

Modelo de Wess–Zumino–Witten.

En este apéndice presentamos los aspectos más relevantes del modelo de Wess–Zumino–Witten (WZW), es decir, de la CFT a partir de la cual, mediante una perturbación relevante, hemos construido los modelos SSSG, cuyo estudio ha sido el objeto de este trabajo.

La acción del modelo bidimensional de WZW tiene la forma:

$$S_{WZW} = -\frac{1}{2\lambda^2} \int dt dx (h^{-1} \partial^\mu h | h^{-1} \partial_\mu h) + \frac{1}{\beta^2} \Gamma[h], \quad (\text{A.0.1})$$

donde $h(x, t)$ toma valores en cualquier grupo simple y conectado G , y (t, x) son coordenadas en el espacio Euclídeo bidimensional. λ^2 y $1/\beta^2$ son constantes de acoplamiento adimensionales y, como podemos ver, para $\frac{1}{\beta^2} = 0$, la acción (A.0.1) se reduce a la acción del modelo σ que, como es bien sabido, es asintóticamente libre y efectivamente masivo.

El término $\Gamma[h]$ está dado por el funcional

$$\Gamma[h] = \frac{1}{12\pi} \int_B dt dx dy \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (h^{-1} \partial_\alpha h | h^{-1} \partial_\beta h h^{-1} \partial_\gamma h), \quad (\text{A.0.2})$$

siendo B un disco tridimensional de coordenadas (t, x, y) cuya frontera se identifica con el espacio euclídeo bidimensional, (t, x) .

El funcional $\Gamma[h]$ representa una contribución no convencional a la acción, pues está dado por una integral tridimensional y no bidimensional. Para entender en qué sentido $\Gamma[h]$ es una acción lagrangiana ordinaria debemos interpretarlo del siguiente modo; supongamos que, por continuación analítica, interpretamos el espacio euclídeo bidimensional como una esfera S^2 . Un campo $h(x, t)$ es una aplicación de esta esfera S^2 en el grupo de Lie G . Es decir:

$$h(x, t) : S^2 \rightarrow G. \quad (\text{A.0.3})$$

Dado que el grupo de homotopía $\Pi_2(G) = 0$ (ver [38]) para todos los grupos de Lie G simples y complejos¹, la aplicación (A.0.3) puede ser extendida a otra aplicación

$$h(y, x, t) : B \rightarrow G \quad \text{con} \quad \partial B = S^2, \quad (\text{A.0.4})$$

¹El grupo de homotopía $\Pi_2(G)$ está formado precisamente por las clases de homotopía de aplicaciones de la forma (A.0.3).

siendo B un disco tridimensional con coordenadas (y, x, t) cuya frontera ∂B es el espacio euclídeo. La aplicación $h(y, x, t)$ se reduce a $h(x, t)$ en la frontera de B .

Sin embargo, la elección de B no es única, puesto que puede existir otro disco B' cuya frontera sea también S^2 . En la figura siguiente vemos un ejemplo de esto, en una dimensión inferior, lo cual nos permite hacer una representación gráfica de lo que sucede.

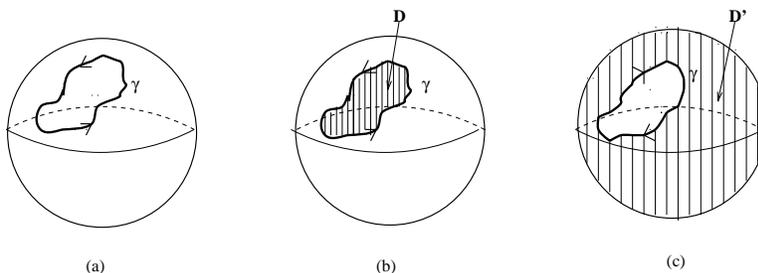


Figura A.1: (a) Órbita γ de una partícula en una esfera S^2 . (b) Disco D cuya frontera es γ . (c) Disco D' cuya frontera es γ y tal que $D + D' = S^2$.

La figura (a) representa una órbita cerrada γ que puede ser la órbita de una partícula en una esfera S^2 . Puesto que $\Pi_1(S^2) = 0$, el círculo γ en S^2 es la frontera de un disco D , que se representa en la figura (b), pero también lo es del disco D' , que se representa en (c).

Supongamos que deseamos incluir en una integral de camino de Feynman un término del tipo e^{iP} , siendo P una integral sobre el disco D de la forma:

$$P = \int_D w_{\mu\nu} d\Sigma^{\mu\nu}, \quad (\text{A.0.5})$$

donde $w_{\mu\nu}$ es una dos-forma en S^2 y $d\Sigma^{\mu\nu}$ el elemento de superficie en S^2 . Si e^{iP} es un término incluido en una integral funcional ha de ser univaluado, es decir, ha de tomar el mismo valor si la integral se realiza en D que si se realiza en D' . Pero la órbita γ está orientada en sentidos opuestos en cada uno de estos casos, lo cual significa que si la integral se realiza en D' el elemento de superficie $d\Sigma^{\mu\nu}$ cambia su signo. Esto nos conduce a la condición

$$e^{i \int_{D+D'} w_{\mu\nu} d\Sigma^{\mu\nu}} = 1 \Rightarrow \int_{D+D'} w_{\mu\nu} d\Sigma^{\mu\nu} = 2\pi\mathbb{Z}, \quad (\text{A.0.6})$$

es decir, la integral P ha de satisfacer una condición de cuantización que es exactamente la condición de cuantización de Dirac para el producto de las cargas eléctrica y magnética si consideramos la órbita γ como la trayectoria de una partícula cargada que interacciona con un monopolo magnético situado en el centro de la esfera y la dos-forma $w_{\mu\nu}$ es proporcional al tensor de Campo Electromagnético $F_{\mu\nu}$, mediante la carga eléctrica de dicha partícula.

Volvamos ahora a nuestro caso. La órbita γ es ahora el espacio euclídeo, compactificado en una esfera S^2 y la esfera S^2 del ejemplo anterior es ahora un grupo de Lie simple y conectado G . La situación es totalmente análoga. Tenemos diferentes posibilidades a

la hora de elegir un disco tridimensional B cuya frontera sea S^2 y, al igual que en el caso anterior, podemos considerar dos posibilidades B y B' tales que $B + B' = S^3$.

La exponencial $e^{\frac{iS_{WZW}}{\hbar}}$ debe ser univaluada en Mecánica Cuántica y, en particular, también debe serlo la parte que contiene a la acción lagrangiana (A.0.2), por lo tanto:

$$e^{\frac{i\Gamma[h]}{\beta^2}} \Big|_{B+B'=S^3} = 1 \quad (\text{A.0.7})$$

condición que implica:

$$\frac{1}{12\pi\beta^2} \int_{S^3} dt dx dy \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (h^{-1} \partial_\alpha h | h^{-1} \partial_\beta h h^{-1} \partial^\gamma h) = 2\pi\mathbb{Z}. \quad (\text{A.0.8})$$

Ahora bien, se verifica

$$\frac{1}{12\pi} \int_{S^3} dt dx dy \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (h^{-1} \partial_\alpha h | h^{-1} \partial_\beta h h^{-1} \partial^\gamma h) = \int_{S^3} w_{\alpha\beta\gamma} d\Sigma^{\alpha\beta\gamma}, \quad (\text{A.0.9})$$

donde $w_{\alpha\beta\gamma}$ es la única tres-forma invariante quiral definida en la variedad asociada con el grupo de Lie G y $d\Sigma^{\alpha\beta\gamma}$ representa el elemento de superficie en S^3 , análogamente a (A.0.5). La tres-forma $w_{\alpha\beta\gamma}$ tiene la particularidad de que, para G simple y compacto puede ser normalizada de tal modo que se verifique:

$$\int_{S^3} w_{\alpha\beta\gamma} d\Sigma^{\alpha\beta\gamma} = \frac{4\pi\mathbb{Z}}{\Psi_g^2}, \quad (\text{A.0.10})$$

siendo Ψ_g^2 el cuadrado de una raíz larga del álgebra \bar{g} .

Por lo tanto, si se verifica (A.0.10) la condición de cuantización (A.0.8) se traduce en la siguiente condición de cuantización sobre la constante de acoplamiento β :

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{\Psi_g^2}{2} k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad (\text{A.0.11})$$

siendo k lo que se denomina nivel de la representación del álgebra de Kac–Moody. Esta condición asegura la independencia de la acción (A.0.13) con respecto a la normalización de la forma bilineal, de acuerdo con el resultado (2.4.52), obtenido en el capítulo 2. Habitualmente se elige $\Psi_g^2 = 2$, de modo que, a nivel cuántico $1/\beta^2$ toma valores enteros.

Volvamos ahora a la cuestión inicial, ¿en qué sentido es $\Gamma[h]$ una acción lagrangiana ordinaria?. La respuesta es que es posible demostrar que localmente (en el espacio de campos) $\Gamma[h]$ puede ser escrito como una integral sobre el espacio–tiempo de un Lagrangiano ordinario que no es invariante quiral pero que, bajo una transformación quiral cambia en una divergencia total (veremos en la siguiente sección que la acción del modelo de Wess–Zumino–Witten presenta una simetría quiral cuyas corrientes Noether asociadas satisfacen el álgebra de Kac–Moody de nivel k).

El grupo de renormalización posee un punto fijo estable en el límite infrarrojo correspondiente a:

$$\lambda^2 = 4\pi\beta^2, \quad (\text{A.0.12})$$

de modo que la teoría efectiva es no masiva y su comportamiento a largas distancias viene dado por la acción (A.0.1), eliminando λ^2 en términos de β según (A.0.12), es decir:

$$S_{WZW}[h] = \frac{1}{\beta^2} \left\{ \frac{1}{8\pi} \int dt dx (h^{-1} \partial^\mu h | h^{-1} \partial_\mu h) + \Gamma[h] \right\}. \quad (\text{A.0.13})$$

A.1 Propiedades del modelo de WZW.

La propiedad más importante de la acción (A.0.13), es su invariancia con respecto al álgebra de corrientes de Kac–Moody, de dimensión infinita y nivel k . La acción (A.0.13) es invariante bajo las transformaciones

$$g \mapsto \Omega(z) h(z, \bar{z}) \bar{\Omega}(\bar{z}), \quad (\text{A.1.14})$$

donde $\Omega(z)$ y $\bar{\Omega}(\bar{z})$ son matrices arbitrarias que toman valores en G y que dependen analíticamente de las coordenadas complejas z, \bar{z} respectivamente.

El contenido en campos, dimensiones anómalas de estos campos y ecuaciones para las funciones de correlación pueden verse en detalle en [7].

La simetría de dimensión infinita (A.1.14) del modelo de WZW está generada por las corrientes locales

$$J = J^a t^a = -\frac{1}{4\beta^2} \partial h h^{-1} \quad , \quad \bar{J} = \bar{J}^a t^a = -\frac{1}{4\beta^2} h^{-1} \bar{\partial} h, \quad (\text{A.1.15})$$

que satisfacen las ecuaciones:

$$\partial \bar{J} = \bar{\partial} J = 0. \quad (\text{A.1.16})$$

Las expresiones (A.1.15) de las corrientes en términos del campo h son características del modelo de Wess–Zumino–Witten y, a nivel cuántico, producen las siguientes relaciones

$$\hbar(k + h_g^\vee) \partial h(z, \bar{z}) = (J^a(z) t^a h(z, \bar{z})), \quad (\text{A.1.17})$$

$$\hbar(k + h_g^\vee) \bar{\partial} h(z, \bar{z}) = (\bar{J}^a(z) t^a h(z, \bar{z})). \quad (\text{A.1.18})$$

donde los paréntesis $()$ indican ordenación normal, tal y como ésta se define en el apéndice B.

Las corrientes J y \bar{J} satisfacen las siguientes OPE's²:

$$J^a(w) J^b(z) = \frac{k \delta^{ab}}{(w-z)^2} + \frac{f^{abc} J^c(z)}{(w-z)} + \dots \quad (\text{A.1.19})$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura del álgebra de Lie g generada por elementos t^a antihermíticos que cumplen:

$$[t^a, t^b] = f^{abc} t^c. \quad (\text{A.1.20})$$

Dado que la teoría tiene invariancia conforme el tensor energía-momento tiene traza nula y sólo dos componentes independientes $T(z)$ y $\bar{T}(\bar{z})$ que verifican las siguientes OPE's:

$$T(w) T(z) = \frac{c/2}{(w-z)^4} + \frac{2T(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial T(z)}{(w-z)} + \dots, \quad (\text{A.1.21})$$

²Los puntos suspensivos en estas OPE's indican términos regulares.

$$T(w)J^a(z) = \frac{J^a(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial J^a(z)}{(w-z)} + \dots, \quad (\text{A.1.22})$$

donde c es la carga central que viene dada por

$$c_{WZW}(G, k) = \frac{k \dim(G)}{k + h_g^\vee}. \quad (\text{A.1.23})$$

Todas estas OPE's son propias de cualquier CFT aunque la forma de la carga central (A.1.23) es característica de este modelo.

Sea \mathcal{F} el espacio de campos mutuamente locales de la teoría. Para todo $F(z, \bar{z}) \in \mathcal{F}$ definimos la acción de los operadores J_n^a , actuando en \mathcal{F} ,

$$J_n^a F(z, \bar{z}) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^n J^a(w) F(z, \bar{z}). \quad (\text{A.1.24})$$

Como se sigue de (A.1.19), los operadores J_n^a satisfacen el álgebra de Kac–Moody de G para nivel k :

$$[J_n^a, J_m^b] = f^{abc} J_{n+m}^c + \frac{1}{2} k n \delta^{ab} \delta_{n+m,0}. \quad (\text{A.1.25})$$

Las componentes independientes del tensor energía–momento tienen la siguiente forma en términos de las corrientes,

$$T(z) = \frac{-1}{\Psi_g^2(k + h_g^\vee)} (J^a J^a), \quad (\text{A.1.26})$$

$$\bar{T}(\bar{z}) = \frac{-1}{\Psi_g^2(k + h_g^\vee)} (\bar{J}^a \bar{J}^a), \quad (\text{A.1.27})$$

esta forma se corresponde precisamente con la construcción de Sugawara [21] para el tensor energía–momento.

Asimismo podemos definir la acción de los generadores de Virasoro, L_n , que satisfacen el álgebra

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0}, \quad (\text{A.1.28})$$

sobre el espacio \mathcal{F} ,

$$L_n F(z, \bar{z}) = \oint_z \frac{dw}{2\pi i} (w-z)^{n+1} T(w) F(z, \bar{z}). \quad (\text{A.1.29})$$

Los generadores de Virasoro admiten una expresión en términos de los de Kac–Moody de la forma:

$$L_n = \frac{-1}{\Psi_g^2(k + h_g^\vee)} (J^a J^a)_n, \quad (\text{A.1.30})$$

utilizando de nuevo la prescripción de orden normal que se presenta en el siguiente apéndice.

Asimismo los generadores de Virasoro y Kac–Moody tienen el siguiente conmutador:

$$[J_m^a, L_n] = m J_{m+n}^a. \quad (\text{A.1.31})$$

Para una descripción más detallada del modelo de WZW se puede consultar [7, 8, 9]. También puede encontrarse información sobre este modelo y, en general, sobre las propiedades generales de las CFT's en [10] y finalmente, en [21], el modelo de WZW aparece en el marco de una revisión exhaustiva de la conexión entre álgebras de Kac–Moody y Virasoro con la Física Cuántica.

Apéndice B

Orden normal y relaciones entre OPE's.

En este apéndice presentamos un resumen con los principales resultados referentes a las OPE's que ha sido necesario calcular en el capítulo 4. En primer lugar introduciremos la definición de orden normal que se ha utilizado en este trabajo, que es la misma que se utiliza en [27], para luego seguir con una serie de resultados que han sido importantes para la obtención de las densidades conservadas de spines 2 y 4.

B.1 Prescripción de orden normal.

El producto ordenado normalmente de dos operadores $A(z)$ y $B(w)$ tomados en puntos coincidentes se define como:

$$(AB)(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_z \frac{dx}{(x-z)} A(x)B(z). \quad (\text{B.1.1})$$

El contorno en torno a z se interpreta como la diferencia entre dos contornos $|x| > |z|$ y $|z| > |x|$ y esto equivale a establecer la siguiente relación entre coeficientes de la expansión en modos de los operadores:

$$(AB)_n = \sum_{p \leq -\Delta_A} A_p B_{n-p} + \sum_{p > -\Delta_A} B_{n-p} A_p, \quad (\text{B.1.2})$$

donde Δ_A y Δ_B son las dimensiones conformes de los campos $A(z)$ y $B(w)$ y se verifican las relaciones

$$A(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-\Delta_A} A_n, \quad B(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^{-n-\Delta_B} B_n. \quad (\text{B.1.3})$$

Si escribimos la OPE entre los operadores $A(z)$ y $B(w)$ tomados en diferentes puntos como¹

$$A(z)B(w) = \sum_{r \geq 0} \frac{\{AB\}_r(w)}{(z-w)^r} + \{AB\}_0(w) + \dots, \quad (\text{B.1.4})$$

¹En cualquier OPE los puntos suspensivos indican términos regulares de orden $(z-w)$ ó superior.

y, por lo tanto, comparando con (B.1.1), llegamos a la siguiente igualdad:

$$(AB)(z) = \{AB\}_0(z), \quad (\text{B.1.5})$$

de modo que la definición (B.1.1) para el orden normal de dos operadores es realmente la más natural.

B.2 Densidades conservadas de spin 2.

La forma general de las densidades de spin 2 era:

$$D_{\alpha\beta}(J^\alpha J^\beta)(z), \quad \text{con } D_{\alpha\beta} = D_{\beta\alpha}. \quad (\text{B.2.6})$$

La OPE de estas densidades con el campo primario es:

$$D_{\alpha\beta}(J^\alpha J^\beta)(z)\Phi(w, \bar{w}) = \frac{\hbar^2 D_{\alpha\beta}\Phi(w, \bar{w})t^\alpha t^\beta}{(z-w)^2} + \frac{-2\hbar D_{\alpha\beta}(J^\alpha\Phi(w, \bar{w}))t^\beta}{(z-w)} + \dots, \quad (\text{B.2.7})$$

donde $\Phi(w, \bar{w}) = \langle \Lambda_-, P \rangle$ y, en la representación adjunta,

$$t^\alpha t^\beta \dots t^\gamma \Phi(w, \bar{w}) = \langle [\dots [\Lambda_-, t^\alpha], t^\beta], \dots, t^\gamma], P \rangle. \quad (\text{B.2.8})$$

Otro resultado que también se ha utilizado es el siguiente:

$$(J^\alpha J^\beta) = (J^\beta J^\alpha) + \hbar f^{\alpha\beta\gamma} \partial J^\gamma. \quad (\text{B.2.9})$$

B.3 Densidades conservadas de spin 4.

Para el caso de spin 4 la OPE entre densidades y campo primario es más complicada, apareciendo polos hasta de orden 4. En esta sección presentaremos la forma exacta de esta OPE así como los argumentos que nos han permitido determinar la forma general que han de tener las densidades de spin 4.

B.3.1 OPE's entre las densidades de spin 4 y el campo primario.

El resultado de la OPE entre la densidad de spin 4 genérica $I_4(z)$ dada por (4.3.78), y un campo primario $\Phi(w, \bar{w})$ es el siguiente:

1. Polo de primer orden:

$$\begin{aligned} I_4(z)\Phi(w, \bar{w})|_{[1]} = & -R_{\alpha\beta\gamma\rho} \left\{ 4\hbar(J^\alpha(J^\beta(J^\gamma\Phi(w, \bar{w}))))t^\rho + 6\hbar^2(J^\alpha(J^\beta\partial\Phi(w, \bar{w})))t^\gamma t^\rho + \right. \\ & + 2\hbar^3(J^\alpha\partial^2\Phi(w, \bar{w}))t^\beta t^\gamma t^\rho - 6\hbar^2\partial(J^\alpha(J^\beta\Phi(w, \bar{w})))t^\gamma t^\rho - 4\hbar^3\partial(J^\alpha\partial\Phi(w, \bar{w}))t^\beta t^\gamma t^\rho + \\ & \left. + 2\hbar^3\partial^2(J^\alpha\Phi(w, \bar{w}))t^\beta t^\gamma t^\rho - \hbar^4\partial^3\Phi(w, \bar{w})t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\rho \right\} - P_{\alpha\beta\gamma} \left\{ 2\hbar(J^\alpha(\partial J^\gamma\Phi(w, \bar{w})))t^\beta + \right. \\ & + \hbar(J^\alpha(J^\beta\partial\Phi(w, \bar{w})))t^\gamma + \hbar^2(\partial J^\gamma\partial\Phi(w, \bar{w}))t^\alpha t^\beta + \hbar^2(J^\alpha\partial^2\Phi(w, \bar{w}))t^\beta t^\gamma - \\ & - \hbar^2\partial(\partial J^\gamma\Phi(w, \bar{w}))t^\alpha t^\beta - \hbar\partial(J^\alpha(J^\beta\Phi(w, \bar{w})))t^\gamma - 2\hbar^2\partial(J^\beta\partial\Phi(w, \bar{w}))t^\alpha t^\gamma + \\ & \left. + \hbar^2\partial^2(J^\alpha\Phi(w, \bar{w}))t^\beta t^\gamma \right\} - 2\hbar^2 Q_{\alpha\beta}(\partial^2 J^\alpha\Phi(w, \bar{w}))t^\beta. \quad (\text{B.3.10}) \end{aligned}$$

2. Polo de segundo orden:

$$\begin{aligned}
 I_4(z)\Phi(w, \bar{w})|_{[2]} = & R_{\alpha\beta\gamma\rho} \left\{ 6\hbar^2 (J^\alpha (J^\beta \Phi(w, \bar{w}))) t^\gamma t^\rho + 4\hbar^3 (J^\alpha \partial \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma t^\rho + \right. \\
 & \left. + \partial (J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma t^\rho \right\} + P_{\alpha\beta\gamma} \left\{ \hbar (J^\alpha (J^\beta \Phi(w, \bar{w}))) t^\gamma + \hbar^2 (\partial J^\gamma \Phi(w, \bar{w})) t^\alpha t^\beta + \right. \\
 & \left. + 2\hbar^2 (J^\alpha \partial \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma - 2\hbar^2 \partial (J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma \right\} - 2\hbar Q_{\alpha\beta} (\partial J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta \quad (\text{B.3.11})
 \end{aligned}$$

3. Polo de tercer orden:

$$\begin{aligned}
 I_4(z)\Phi(w, \bar{w})|_{[3]} = & -4\hbar^3 R_{\alpha\beta\gamma\rho} (J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma t^\rho - 2\hbar^2 P_{\alpha\beta\gamma} (J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta t^\gamma - \\
 & - 2\hbar Q_{\alpha\beta} (J^\alpha \Phi(w, \bar{w})) t^\beta. \quad (\text{B.3.12})
 \end{aligned}$$

4. Polo de cuarto orden:

$$\begin{aligned}
 I_4(z)\Phi(w, \bar{w})|_{[4]} = & \hbar^4 R_{\alpha\beta\gamma\rho} \Phi(w, \bar{w}) t^\alpha t^\beta t^\gamma t^\rho + \hbar^3 P_{\alpha\beta\gamma} \Phi(w, \bar{w}) t^\alpha t^\beta t^\gamma + \\
 & + 2\hbar^2 Q_{\alpha\beta} \Phi(w, \bar{w}) t^\alpha t^\beta. \quad (\text{B.3.13})
 \end{aligned}$$

B.3.2 Forma general de las densidades I_4 .

Además de la OPE anterior hemos utilizado otras relaciones que son de interés. De hecho, la elección de la forma más general que podían tener las densidades conservadas de spin 4 se ha basado en una serie de consideraciones que ya explicamos brevemente en el capítulo 4 y que ahora podremos entender mejor estudiando una serie de relaciones entre ordenaciones normales.

Recordemos que en el capítulo 4 hemos trabajado con densidades de spin 4 de la forma:

$$I_4(z) = R_{\alpha\beta\gamma\rho} (J^\alpha (J^\beta (J^\gamma J^\rho))) + P_{\alpha\beta\gamma} (J^\alpha (J^\beta (\partial J^\gamma))) + Q_{\alpha\beta} (J^\alpha \partial^2 J^\beta), \quad (\text{B.3.14})$$

donde $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ y $Q_{\alpha\beta}$ eran tensores totalmente simétricos y el tensor $P_{\alpha\beta\gamma}$ satisfacía las siguientes dos condiciones:

$$P_{\alpha\beta\gamma} = P_{\beta\alpha\gamma}, \quad \text{y} \quad P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\beta\alpha} + P_{\alpha\gamma\beta} = 0. \quad (\text{B.3.15})$$

Pasemos entonces a analizar cada una de estas condiciones separadamente:

• **$R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ totalmente simétrico.**

La elección de $R_{\alpha\beta\gamma\rho}$ como un tensor totalmente simétrico se justifica debido, entre otras, a las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 (J^\alpha (J^\gamma (J^\beta J^\rho))) = & (J^\alpha (J^\beta (J^\gamma J^\rho))) - \hbar f^{\beta\gamma\xi} (J^\alpha (J^\rho \partial J^\xi)) + \\
 & + \frac{\hbar^2}{2} f^{\beta\gamma\xi} f^{\rho\xi\delta} (J^\alpha \partial^2 J^\delta), \quad (\text{B.3.16})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(J^\beta(J^\alpha(J^\rho J^\gamma))) &= (J^\alpha(J^\beta(J^\gamma J^\rho))) - \hbar f^{\alpha\beta\xi}(J^\gamma(J^\rho \partial J^\xi)) + \\
&+ \frac{\hbar^2}{2} f^{\alpha\beta\xi} f^{\rho\xi\delta}(J^\gamma \partial^2 J^\delta) + \frac{\hbar^2}{2} f^{\alpha\beta\xi} f^{\gamma\xi\delta}(J^\rho \partial^2 J^\delta) + \\
&+ \hbar f^{\gamma\rho\xi} \left\{ (J^\alpha(J^\beta J^\gamma \partial J^\xi)) - \hbar f^{\alpha\beta\mu}(\partial J^\mu \partial J^\xi) \right\} - \\
&- \frac{\hbar^3}{6} f^{\alpha\beta\xi} f^{\gamma\xi\mu} f^{\rho\mu\delta} \partial^3 J^\delta.
\end{aligned} \tag{B.3.17}$$

Estas dos relaciones son ejemplos de que cualquier cambio en la ordenación de las corrientes que aparecen en el producto ordenado normalmente $(J^\beta(J^\alpha(J^\rho J^\gamma)))$, produce términos de orden inferior, es decir, del tipo $(J(J\partial J))$ y $(J\partial^2 J)$ que se absorberían mediante redefiniciones de los tensores $P_{\alpha\beta\gamma}$ y $Q_{\alpha\beta}$.

- $P_{\alpha\beta\gamma}$ **simétrico en α, β .**

Los argumentos que justifican que $P_{\alpha\beta\gamma}$ sea totalmente simétrico en sus dos primeros índices son del mismo tipo que los del apartado anterior y se basan en la siguiente igualdad:

$$(J^\beta(J^\alpha \partial J^\gamma)) = (J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) - \hbar f^{\alpha\beta\xi}(\partial J^\gamma \partial J^\xi) + \frac{\hbar^2}{6} f^{\alpha\beta\xi} f^{\gamma\xi\rho} \partial^3 J^\rho, \tag{B.3.18}$$

es decir, cambios de orden en las dos primeras corrientes de $(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma))$ generan términos del tipo $\partial J \partial J$ que podrían reabsorberse en una redefinición de $Q_{\alpha\beta}$. El elegir $P_{\alpha\beta\gamma}$ simétrico en sus dos primeros índices supone eliminar este tipo de términos.

- $Q_{\alpha\beta}$ **totalmente simétrico.**

Por motivos totalmente análogos a los anteriores hemos elegido un tensor $Q_{\alpha\beta}$ totalmente simétrico. La siguiente igualdad nos permite entender dicha elección,

$$(J^\beta \partial^2 J^\alpha) = (\partial^2 J^\alpha J^\beta) - \frac{\hbar}{3} f^{\alpha\beta\gamma} \partial^3 J^\gamma. \tag{B.3.19}$$

Además, no aparecen en las densidades conservadas términos del tipo $(\partial J \partial J)$ ó $(\partial^2 J J)$ porque realmente puede demostrarse que, salvo derivadas totales, pueden igualarse a un término del tipo $(J \partial^2 J)$. De hecho se verifica:

$$(\partial J^\alpha \partial J^\beta) = \partial(J^\alpha \partial J^\beta) - (J^\alpha \partial^2 J^\beta), \tag{B.3.20}$$

$$\begin{aligned}
(\partial^2 J^\alpha J^\beta) &= \partial(\partial J^\alpha J^\beta) - (\partial J^\alpha \partial J^\beta) = \\
&= \partial^2(J^\alpha J^\beta) + (J^\alpha \partial^2 J^\beta).
\end{aligned} \tag{B.3.21}$$

• $P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\beta\alpha} + P_{\alpha\gamma\beta} = 0.$

Veamos finalmente cómo se deduce la propiedad $P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\beta\gamma\alpha} + P_{\alpha\gamma\beta} = 0.$ Ésta se deriva partiendo de la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} P_{\alpha\beta\gamma}\partial(J^\alpha(J^\beta J^\gamma)) &= P_{\alpha\beta\gamma}(\partial J^\alpha(J^\beta J^\gamma)) + P_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(\partial J^\beta J^\gamma)) + P_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) = \\ &= \{P_{\alpha\beta\gamma} + 2P_{\alpha\gamma\beta}\}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) + \hbar P_{\alpha\beta\gamma} f^{\beta\gamma\xi}(J^\alpha(\partial^2 J^\xi)) - \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{6} P_{\alpha\beta\gamma} f^{\alpha\beta\xi} f^{\gamma\xi\rho} \partial^3 J^\rho, \end{aligned} \quad (\text{B.3.22})$$

donde hemos utilizado:

$$\begin{aligned} (J^\beta(J^\gamma \partial J^\alpha)) &= (\partial J^\alpha(J^\beta(J^\gamma))) - \frac{\hbar}{2} \{f^{\alpha\gamma\rho}(J^\beta \partial^2 J^\rho) + f^{\alpha\beta\rho}(J^\gamma \partial^2 J^\rho)\} + \\ &\quad + \frac{\hbar^2}{6} f^{\alpha\beta\rho} f^{\gamma\rho\xi} \partial^3 J^\xi, \end{aligned} \quad (\text{B.3.23})$$

junto con,

$$(J^\alpha(J^\gamma \partial J^\beta)) = (J^\alpha(\partial J^\beta J^\gamma)) - \frac{\hbar}{2} f^{\beta\gamma\rho}(J^\alpha \partial^2 J^\rho). \quad (\text{B.3.24})$$

Pero (B.3.22) se puede escribir también del siguiente modo²:

$$\{P_{\alpha\beta\gamma} + 2P_{\alpha\gamma\beta}\}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) + \hbar P_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha \partial^2 J^\rho) f^{\beta\gamma\rho} = DT. \quad (\text{B.3.25})$$

Por otra parte, puede demostrarse que

$$(\partial^2 J^\alpha J^\beta) - (J^\beta \partial^2 J^\alpha) = DT. \quad (\text{B.3.26})$$

Esta relación, junto con (B.3.21) equivale a decir que podemos reescribir (B.3.25) del siguiente modo:

$$\{P_{\alpha\beta\gamma} + 2P_{\alpha\gamma\beta}\}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) + \frac{\hbar}{2}(J^\alpha \partial^2 J^\rho) \{P_{\alpha\beta\gamma} f^{\beta\gamma\rho} + P_{\rho\beta\gamma} f^{\beta\gamma\alpha}\} = DT, \quad (\text{B.3.27})$$

donde hemos tomado la parte simétrica en α, ρ en el segundo sumando del primer miembro de la ecuación (B.3.25), pues la parte antisimétrica, de acuerdo con (B.3.26) es una derivada total que se suma al segundo miembro.

Otro modo de escribir la ecuación (B.3.27) es el siguiente:

$$\{R_{\alpha\beta\gamma} + P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha}\}(J^\alpha(J^\beta \partial J^\gamma)) = DT - \frac{\hbar}{2}(J^\alpha \partial^2 J^\rho) \{P_{\alpha\beta\gamma} f^{\beta\gamma\rho} + P_{\rho\beta\gamma} f^{\beta\gamma\alpha}\}, \quad (\text{B.3.28})$$

donde,

$$R_{\alpha\beta\gamma} = P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\beta\alpha} + P_{\alpha\gamma\beta}. \quad (\text{B.3.29})$$

²Las iniciales DT significan “derivadas totales”.

De este modo hemos introducido explícitamente en (B.3.27) la combinación de tensores que queremos demostrar que es nula. Nuestro objetivo será precisamente probar que se cumple lo siguiente:

$$R_{\alpha\beta\gamma}(J^\alpha(J^\beta\partial J^\gamma)) = DT, \quad (\text{B.3.30})$$

lo cual equivaldría a concluir que

$$R_{\alpha\beta\gamma} = 0. \quad (\text{B.3.31})$$

Si nos fijamos en la ecuación (B.3.28), vemos que demostrar (B.3.30) implica demostrar la siguiente igualdad:

$$\frac{\hbar}{2}(J^\alpha\partial^2 J^\rho)\{P_{\alpha\beta\gamma}f^{\beta\gamma\rho} + P_{\rho\beta\gamma}f^{\beta\gamma\alpha}\} + \{P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha}\}(J^\alpha(J^\beta\partial J^\gamma)) = DT, \quad (\text{B.3.32})$$

así que nos concentraremos en esto.

El segundo sumando de la anterior igualdad puede escribirse también como:

$$\{P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha}\}\{(J^\alpha(J^\beta\partial J^\gamma)) - (J^\beta(J^\alpha\partial J^\gamma))\}, \quad (\text{B.3.33})$$

puesto que $P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha}$ es totalmente antisimétrico en α, β .

Por otra parte se cumple:

$$(J^\alpha(J^\beta\partial J^\gamma)) - (J^\beta(J^\alpha\partial J^\gamma)) = -\frac{\hbar}{2}f^{\alpha\beta\xi}(J^\gamma\partial^2 J^\xi) + DT, \quad (\text{B.3.34})$$

de manera que, podemos reescribir (B.3.33) como:

$$-\frac{\hbar}{2}(P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha})f^{\alpha\beta\xi}(J^\gamma\partial^2 J^\xi) + DT, \quad (\text{B.3.35})$$

ó, utilizando (B.3.26), como:

$$-\frac{\hbar}{4}\{(P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha})f^{\alpha\beta\xi} + (P_{\alpha\xi\beta} - P_{\beta\xi\alpha})f^{\alpha\beta\gamma}\}(J^\gamma\partial^2 J^\xi) + DT. \quad (\text{B.3.36})$$

Por lo tanto, (B.3.32) queda, después de todas estas manipulaciones como:

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar}{4}\{(P_{\alpha\gamma\beta} - P_{\beta\gamma\alpha})f^{\alpha\beta\xi} + (P_{\alpha\xi\beta} - P_{\beta\xi\alpha})f^{\alpha\beta\gamma}\}(J^\gamma\partial^2 J^\xi) + \\ &+\frac{\hbar}{2}(J^\alpha\partial^2 J^\rho)\{P_{\alpha\beta\gamma}f^{\beta\gamma\rho} + P_{\rho\beta\gamma}f^{\beta\gamma\alpha}\} = DT, \end{aligned} \quad (\text{B.3.37})$$

o bien, de forma más compacta:

$$\frac{\hbar}{4}\{(P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha\beta})f^{\beta\gamma\xi} - (P_{\gamma\xi\beta} + P_{\xi\beta\gamma})f^{\gamma\beta\alpha}\}(J^\alpha\partial^2 J^\xi) = DT. \quad (\text{B.3.38})$$

Pero, debido a la simetría en los dos primeros índices de $P_{\alpha\beta\gamma}$, el primer miembro de la anterior ecuación es realmente nulo, puesto que

$$(P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha\beta})f^{\gamma\beta\xi} = (P_{\gamma\xi\beta} + P_{\xi\beta\gamma})f^{\gamma\beta\alpha} = 0. \quad (\text{B.3.39})$$

De este modo queda demostrado (B.3.31), es decir:

$$P_{\alpha\beta\gamma} + P_{\gamma\alpha\beta} + P_{\gamma\beta\alpha} = 0. \quad (\text{B.3.40})$$

Apéndice C

Características de las álgebras de Lie finitas.

Las raíces, coraíces, sistema de raíces y grupo de Weyl de un álgebra afín pueden ser expresados en términos de los correspondientes objetos que caracterizan al álgebra de Lie de dimensión finita asociada.

En este apéndice daremos una construcción explícita para todos estos objetos y para todas las álgebras de Lie de dimensión finita.

Sea \mathbb{R}^n el espacio Euclídeo con la base habitual $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ y la forma bilineal:

$$(\vec{v}_i | \vec{v}_j) = \delta_{i,j}. \quad (\text{C.0.1})$$

Todas las redes definidas a partir de ahora serán subredes de \mathbb{R}^n con la forma bilineal inherente $(\cdot | \cdot)$. Asumiremos también que todos los índices son distintos.

Todos los resultados que a continuación se presentan pueden encontrarse por ejemplo en [33].

Denotaremos por Q a la red de raíces, por Q^\vee a su dual, por Δ al sistema de raíces del álgebra de Lie, por Π al conjunto de raíces simples, por $\vec{\theta}$ a la raíz larga y finalmente, denotaremos por W al grupo de Weyl. Con esto pasamos ya a dar los resultados para cada caso separadamente.

A_l :

$$Q = Q^\vee = \left\{ \sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^{l+1} \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sum_i k_i = 0 \right\}, \quad (\text{C.0.2})$$

$$\Delta = \{ \vec{v}_i - \vec{v}_j \}, \quad \text{con } i, j = 1, \dots, l+1, \quad (\text{C.0.3})$$

$$\Pi = \{ \vec{\alpha}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{\alpha}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \dots, \vec{\alpha}_l = \vec{v}_l - \vec{v}_{l+1} \}, \quad (\text{C.0.4})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_1 - \vec{v}_{l+1}, \quad (\text{C.0.5})$$

$$W = \{ \text{Todas las permutaciones de } \vec{v}_i \}. \quad (\text{C.0.6})$$

D_l :

$$Q = Q^\vee = \left\{ \sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^l \mid k_i \in \mathbb{Z}, \sum_i k_i \in 2\mathbb{Z} \right\}, \quad (\text{C.0.7})$$

$$\Delta = \{ \pm \vec{v}_i \pm \vec{v}_j \} \text{ con } i, j = 1, \dots, l, \quad (\text{C.0.8})$$

$$\Pi = \{ \vec{\alpha}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \dots, \vec{\alpha}_{l-1} = \vec{v}_{l-1} - \vec{v}_l, \vec{\alpha}_l = \vec{v}_{l-1} + \vec{v}_l \}, \quad (\text{C.0.9})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (\text{C.0.10})$$

$$W = \{ \text{Todas las permutaciones y numero par de cambios de signo de los } \vec{v}_i \}. \quad (\text{C.0.11})$$

B_l :

$$Q = \left\{ \sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^l \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}, \quad Q^\vee = Q(D_l), \quad (\text{C.0.12})$$

$$\Delta = \{ \pm \vec{v}_i \pm \vec{v}_j, \pm \vec{v}_i \}, \text{ con } i, j = 1, \dots, l, \quad (\text{C.0.13})$$

$$\Pi = \{ \vec{\alpha}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \dots, \vec{\alpha}_{l-1} = \vec{v}_{l-1} - \vec{v}_l, \vec{\alpha}_l = \vec{v}_l \}, \quad (\text{C.0.14})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (\text{C.0.15})$$

$$W = \{ \text{Todas las permutaciones y cambios de signo de } \vec{v}_i \} = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.16})$$

C_l :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} Q(D_l), \quad Q^\vee = \sqrt{2} Q(B_l), \quad (\text{C.0.17})$$

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (\pm \vec{v}_i \pm \vec{v}_j), \pm \sqrt{2} \vec{v}_j \right\}, \text{ con } i, j = 1, \dots, l, \quad (\text{C.0.18})$$

$$\Pi = \left\{ \vec{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{v}_1 - \vec{v}_2), \dots, \vec{\alpha}_{l-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{v}_{l-1} - \vec{v}_l), \vec{\alpha}_l = \sqrt{2} \vec{v}_l \right\}, \quad (\text{C.0.19})$$

$$\vec{\theta} = \sqrt{2} \vec{v}_1, \quad (\text{C.0.20})$$

$$W = W(B_l). \quad (\text{C.0.21})$$

G_2 :

$$Q = \frac{1}{\sqrt{3}} Q(A_2), \quad Q^\vee = \sqrt{3} Q(A_2), \quad (\text{C.0.22})$$

$$\Delta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{v}_i - \vec{v}_j), \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (\vec{v}_i + \vec{v}_j - 2\vec{v}_k) \right\} \text{ con } i, j, k = 1, 2, 3, \quad (\text{C.0.23})$$

$$\Pi = \{\vec{\alpha}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3), \vec{\alpha}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)\}, \quad (\text{C.0.24})$$

$$\vec{\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3), \quad (\text{C.0.25})$$

$$W = \pm\{\text{Todas las permutaciones de los } \vec{v}_i\} = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.26})$$

F_4 :

$$Q = \{\sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^4 \mid k_i \in \mathbb{Z} \text{ o } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}\}, \quad Q^\vee = 2Q, \quad (\text{C.0.27})$$

$$\Delta = \{\pm \vec{v}_i, \pm \vec{v}_i \pm \vec{v}_j, \frac{1}{2}(\pm \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \vec{v}_3 \pm \vec{v}_4)\}, \quad (\text{C.0.28})$$

$$\Pi = \{\vec{\alpha}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{\alpha}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{\alpha}_3 = \vec{v}_4, \vec{\alpha}_4 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4)\}, \quad (\text{C.0.29})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (\text{C.0.30})$$

$$W = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.31})$$

E_8 :

$$Q = Q^\vee = \{\sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^8 \mid k_i \in \mathbb{Z} \text{ o } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \sum_i k_i \in 2\mathbb{Z}\}, \quad (\text{C.0.32})$$

$$\Delta = \{\pm \vec{v}_i \pm \vec{v}_j, \frac{1}{2}(\pm \vec{v}_1 \pm \vec{v}_2 \pm \dots \pm \vec{v}_8) \text{ (numero par de signos-)}\}, \quad (\text{C.0.33})$$

$$\begin{aligned} \Pi &= \{\vec{\alpha}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{\alpha}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{\alpha}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_5, \\ &\vec{\alpha}_4 = \vec{v}_5 - \vec{v}_6, \vec{\alpha}_5 = \vec{v}_6 - \vec{v}_7, \vec{\alpha}_6 = \vec{v}_7 - \vec{v}_8, \\ &\vec{\alpha}_7 = \frac{1}{2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \dots - \vec{v}_7 + \vec{v}_8), \vec{\alpha}_8 = \vec{v}_7 + \vec{v}_8\}. \end{aligned} \quad (\text{C.0.34})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad (\text{C.0.35})$$

$$W = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.36})$$

E_7 :

$$Q = Q^\vee = \{\sum_i k_i \vec{v}_i \in \mathbb{R}^8 \mid k_i \in \mathbb{Z} \text{ o } k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, \sum_i k_i = 0\}, \quad (\text{C.0.37})$$

$$\Delta = \{\vec{v}_i - \vec{v}_j, \frac{1}{2}(\pm \vec{v}_1 \pm \dots \pm \vec{v}_8) \text{ (4 signos -)}\}, \quad (\text{C.0.38})$$

$$\begin{aligned}\Pi &= \{\vec{\alpha}_1 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{\alpha}_2 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{\alpha}_3 = \vec{v}_4 - \vec{v}_5, \\ &\vec{\alpha}_4 = \vec{v}_5 - \vec{v}_6, \vec{\alpha}_5 = \vec{v}_6 - \vec{v}_7, \vec{\alpha}_6 = \vec{v}_7 - \vec{v}_8, \\ &\vec{\alpha}_7 = \frac{1}{2}(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4 + \vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \vec{v}_7 + \vec{v}_8)\},\end{aligned}\quad (\text{C.0.39})$$

$$\vec{\theta} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1, \quad (\text{C.0.40})$$

$$W = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.41})$$

E_6 :

$$\begin{aligned}Q &= Q^\vee = \{k_1\vec{v}_1 + \cdots + k_6\vec{v}_6 + \sqrt{2}k_7\vec{v}_7 \in \mathbb{R}^7 \mid \forall k_i \in \mathbb{Z} \\ &\circ \forall k_i \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}, k_1 + \cdots + k_6 = 0\},\end{aligned}\quad (\text{C.0.42})$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \{\vec{v}_i - \vec{v}_j (i, j \leq 6), \frac{1}{2}((e_1\vec{v}_1 + \cdots + e_6\vec{v}_6) \pm \sqrt{2}\vec{v}_7) (e_i = \pm 1, \\ &\sum e_i = 0), \pm\sqrt{2}\vec{v}_7\},\end{aligned}\quad (\text{C.0.43})$$

$$\begin{aligned}\Pi &= \{\vec{\alpha}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2, \vec{\alpha}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_3, \vec{\alpha}_3 = \vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{\alpha}_4 = \vec{v}_4 - \vec{v}_5, \\ &\vec{\alpha}_5 = \vec{v}_5 - \vec{v}_6 = \frac{1}{2}(-\vec{v}_1 - \vec{v}_2 - \vec{v}_3 + \vec{v}_4 + \vec{v}_5 + \vec{v}_6 + \sqrt{2}\vec{v}_7)\},\end{aligned}\quad (\text{C.0.44})$$

$$\vec{\theta} = \sqrt{2}\vec{v}_7, \quad (\text{C.0.45})$$

$$W \times \{\pm 1\} = \text{Aut}(Q). \quad (\text{C.0.46})$$

Las bases de raíces simples aquí presentadas con la forma bilineal (C.0.1), son tales que la longitud de las raíces largas es siempre $\sqrt{2}$.

Apéndice D

Diagramas de Dynkin.

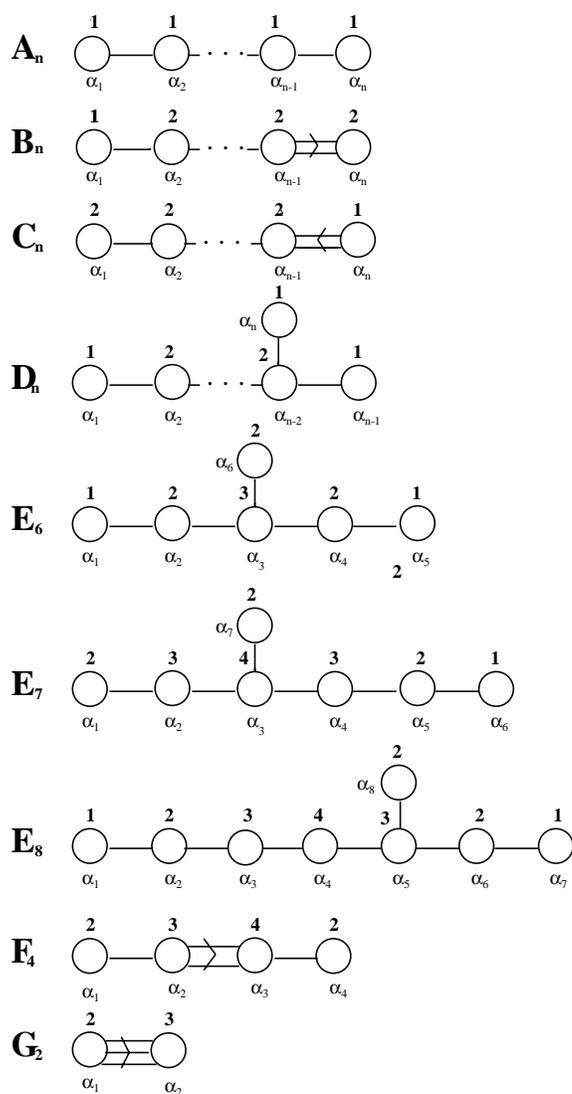


Figura D.1: Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie finitas.

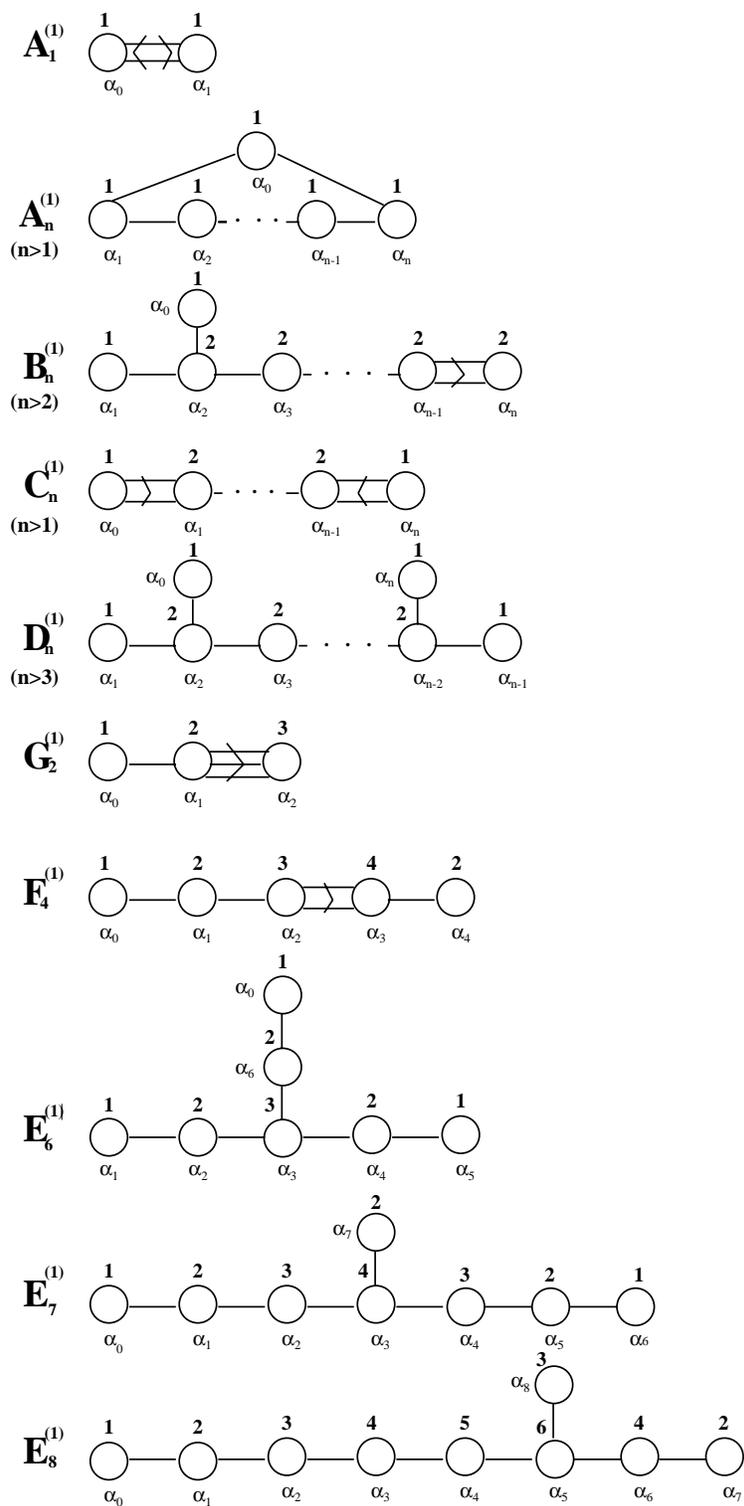


Figura D.2: Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie afines “untwisted”.

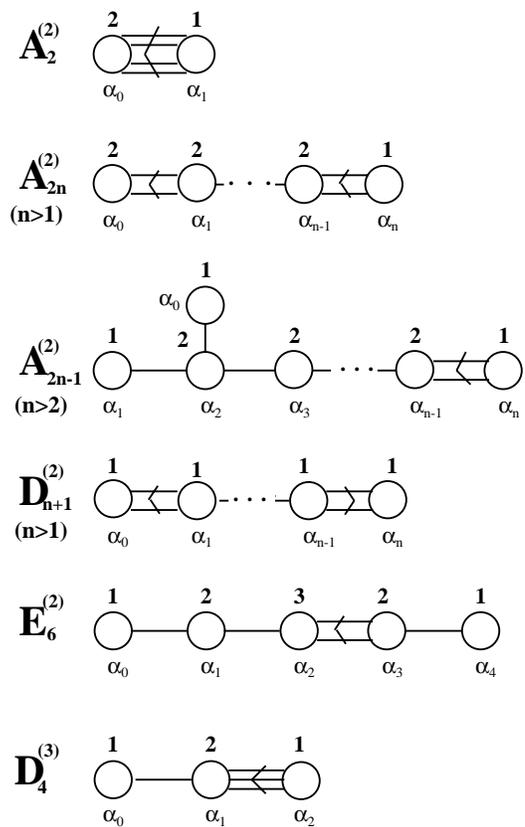


Figura D.3: Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie afines "twisted", $g^{(r)}$, $r = 2, 3$.

Índice de Tablas

2.1	<i>Características de las teorías de Toda no abelianas puramente masivas y con acción real y positiva, siendo h_0 la configuración de vacío.</i>	19
2.2	<i>Espacios simétricos que dan lugar a Modelos Split.</i>	21
2.3	<i>Grupos fundamentales de homotopía asociados a G_0 para los modelos split.</i> . .	37
3.1	<i>Modelos split de tipo $[A_1]$, $[A_2]$ y $[B]$.</i>	61
3.2	<i>Valores de h_g^\vee para álgebras de Lie afines finitas.</i>	62
3.3	<i>Tipo de modelo, dimensión conforme de la perturbación y condición de super-renormalizabilidad de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $SU(n)/SO(n)$ y $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$.</i>	66
3.4	<i>Tipo de modelo, dimensión conforme de la perturbación y condición de super-renormalizabilidad de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $E_6/Sp(4)$, $E_7/SU(8)$, $E_8/SO(16)$, $F_4/Sp(3) \times SU(2)$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$ y $Sp(n)/SU(n) \times U(1)$.</i>	67
3.5	<i>Casimir reducido, gradación, peso máximo de la representación y relación entre las longitudes de las raíces largas de \bar{g} y \bar{g}_0 de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $SU(n)/SO(n)$ y $SO(p+q)/SO(p) \times SO(q)$.</i>	68
3.6	<i>Casimir reducido, gradación, peso máximo de la representación y relación entre las longitudes de las raíces largas de \bar{g} y \bar{g}_0 de los modelos split asociados a espacios simétricos del tipo $E_6/Sp(4)$, $E_7/SU(8)$, $E_8/SO(16)$, $F_4/Sp(3) \times SU(2)$, $G_2/SU(2) \times SU(2)$ y $Sp(n)/SU(n) \times U(1)$.</i>	69
5.1	<i>Espacios simétricos que dan lugar a Modelos Split.</i>	106

Índice de Figuras

3.1	<i>Diagrama de Dynkin de $A_{2n-1}^{(2)}$.</i>	54
3.2	<i>Diagrama de Dynkin de D_n.</i>	54
3.3	<i>Diagrama de Dynkin de $B_{2n}^{(1)}$.</i>	55
3.4	<i>Diagrama de Dynkin de D_n.</i>	56
3.5	<i>Diagrama de Dynkin de B_n.</i>	56
3.6	<i>Diagrama de Dynkin de $C_n^{(1)}$.</i>	57
3.7	<i>Diagrama de Dynkin de A_{n-1}.</i>	57
4.1	<i>Proceso de scattering de $2 \mapsto N$ partículas.</i>	79
4.2	<i>Procesos de scattering de $3 \mapsto 3$ partículas.</i>	81
A.1	<i>(a) Órbita γ de una partícula en una esfera S^2. (b) Disco D cuya frontera es γ. (c) Disco D' cuya frontera es γ y tal que $D + D' = S^2$.</i>	110
D.1	<i>Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie finitas.</i>	125
D.2	<i>Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie afines “untwisted”.</i>	126
D.3	<i>Diagramas de Dynkin de álgebras de Lie afines “twisted”, $g^{(r)}$, $r = 2, 3$.</i>	127

Bibliografía

- [1] C. R. Fernández-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, “*The symmetric space and homogeneous sine-Gordon theories*”, Nucl. Phys. B484 (1997), 609-630.
- [2] C. R. Fernández-Pousa, M. V. Gallas, T. J. Hollowood and J. L. Miramontes, “*Soliton integrable perturbations of parafermionic theories*”, Nucl. Phys. B499 (1997), 673-689.
- [3] C.R. Fernández-Pousa and J.L. Miramontes, “*Semi-classical spectrum of the homogeneous sine-Gordon theories*”, Nucl. Phys. B518 (1998), 745-769.
- [4] M.F. Groot, T.J. Hollowood and J.L. Miramontes, “*Generalized Drinfel’d-Sokolov Hierarchies*”, Commun. Math. Phys. 145 (1992), 57-84.
- [5] A.N. Leznov and M.V. Saveliev “*Two-dimensional integrable exactly and completely integrable dynamical systems*”, Commun. Math. Phys. 89 (1983), 59.
- [6] T.J. Hollowood, J.L. Miramontes and Q-Han Park, “*Massive Integrable Soliton theories*”, Nucl. Phys. B445 (1995), 451-471.
- [7] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov, “*Current algebra and Wess-Zumino model in two dimensions*”, Nucl. Phys. B247 (1984), 83-103.
- [8] E. Witten, “*Non-abelian bosonization in two dimensions*”, Commun. Math. Phys. 92 (1984), 455-472.
- [9] E. Witten, “*Global aspects of current algebra*”, Nucl. Phys. B223 (1983), 422-432.
- [10] *Applied Conformal Field Theory*, by P. Ginsparg in “*Fields, strings and critical phenomena*”, eds. E. Brèzin and J. Zinn-Justin, Les Houches 1988, Session XLIX, North-Holland, Amsterdam (1990).
- [11] A.B. Zamolodchikov, “*Factorized S-matrices and lattice statistical systems*”, Sov. Sci. Rev. Phys. 2 (1980), 1-40.
- [12] A.B. Zamolodchikov and A.B. Zamolodchikov, “*Factorized S-matrices in two dimensions as the exact solutions of certain relativistic Quantum Field Theory models*”, Ann. Phys. 120 (1979), 253-291.

- [13] S. Parke, “*Absence of particle production and factorization of the S -matrix in 1+1-dimensional models*”, Nucl. Phys. B174 (1980), 166-182.
- [14] P. Dorey, “*Exact S -matrices*”, hep-th/9810026.
- [15] S. Coleman and G. Mandula, “*All possible symmetries of the S -matrix*”, Phys. Rev. vol. 159 (1967), No. 5 1251-1256.
- [16] R. Shankar and E. Witten, “ *S -matrix of the supersymmetric non-linear σ model*”, Phys. Rev. vol. 17 (1977), No. 8 2134-2143.
- [17] *Conformal invariance and statistical mechanics*, by J.L. Cardy in “*Fields, strings and critical phenomena*”, eds. E. Brèzin and J. Zinn-Justin, Les Houches 1988, Session XLIX, North-Holland, Amsterdam (1990).
- [18] L. Palla, “*Perturbing the minimal parafermionic models*”, Phys. Lett. B253 (1990), 342-348.
- [19] A.B. Zamolodchikov, “*Higher-order integrals of motion in two-dimensional models of the field theory with a broken conformal symmetry*”, Pis’ ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 46, No. 4 (1987), 129-132.
- [20] A.B. Zamolodchikov, “*Integrable Field theory from Conformal Field theory*”, Adv. Stu. in Pure Mathematics 19 (1989), 641-679.
- [21] P. Goddard and D. Olive “*Kac-Moody and Virasoro algebras in relation to Quantum Physics*”, Int. Jour. Mod. Phys. Vol. 1, No. 2 (1986), 303-414.
- [22] Q-Han Park and H.J. Shin, “*Duality in complex sine-Gordon theory*”, Phys. Let. B359 (1995), 125-132.
- [23] I. Bakas, “*Conservation laws and geometry of perturbed coset models*”, Int. Jour. Mod. Phys. A19 (1994), 3443-3472.
- [24] Q-Han Park, “*Deformed coset models from gauged WZW actions*”, Phys. Let. B328 (1994), 329-336.
- [25] I. Bakas, Q-H. Park and H-J. Shin, “*Lagrangian Formulation of Symmetric Space Sine-Gordon models*”, Phys. Lett. B372 (1996), 45-56.
- [26] V.A. Brazhnikov, “ $\Phi^{(2)}$ *perturbations of the WZW model*”, Nucl. Phys. B501 (1997) 685-710.
- [27] F.A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, “*Extensions of the Virasoro algebra constructed from Kac-Moody algebras using higher order Casimir invariants*”, Nucl. Phys. B304 (1988), 348-370.

- [28] E. Witten, “*On Holomorphic Factorization of WZW and Coset Models*”, Commun. Math. Phys. 144 (1992), 189-212; J.M. Figueroa-O’Farrill and S. Stanciu, “*Nonreductive WZW models and their CFT’s*”, Nucl. Phys. B458 (1996), 137-164; E.B. Kiritsis, “*Duality in gauged WZW models*”, Phys. Lett. A6 (1991), 2871-2879.
- [29] R. D’ Auria, T. Regge and S. Sciuto, “*A general scheme for bidimensional models with associated linear set*”, Phys. Lett. 89B (1980), 363; H. Eichenherr and K. Polmeyer, “*Lax pairs for certain generalizations of the sine-Gordon equation*”, Phys. Lett. 89B (1979), 76; H. Eichenherr, “*Infinitely many conserved local charges for the CP^N -models*”, Phys. Lett. 90B (1980), 121; V.E. Zakharov and A.V. Mikhailov, Sov. Phys. JETP 47 (1978), 1017.
- [30] P. Goddard, J. Nuyts and D. Olive, “*Gauge theories and magnetic charge*”, Nucl. Phys. B125 (1977), 1-28.
- [31] V. G. Kac, “*Graduated Lie algebras and Symmetric Spaces*”, Func. Anal. Appl. 2 (1968), No. 2 182-183.
- [32] S. Helgason, “*Diferential geometry, Lie groups an symmetric spaces*”, Academic Press, New York (1978).
- [33] V. G. Kac, “*Infinite dimensional Lie algebras*”, (3rd ed.), Cambridge University Press, Cambridge (1990).
- [34] G.G.A.Bäuerle and E.A. de Kerf, “*Finite and infinite dimensional Lie algebras and applications in physics*”, Part 1 in *Studies in Mathematical Physics*, North-Holland Publications (1990).
- [35] R. Rajaraman, “*Solitons and instantons*”, North-Holland Publications (1982).
- [36] J.F. Cornwell, “*Group theory in Physics*”, Academic Press (1984).
- [37] A. Das, “*Integrable models*”, World Scientific lecture notes in Physics, Vol. 30, (1989).
- [38] C. Nash and S. Sen, “*Topology and Geometry for Physicists*”, (4rd ed.), Academic Press (1988).
- [39] M.E. Peskin and D. Schroeder, *The Renormalization group*, chapter 12 in “*Quantum Field Theory*”, Addison-Wesley (1995).
- [40] J.D. Jackson, *Introducción a la Electrostatica*, capítulo 1 de “*Electrodinámica Clásica*”, Alhambra Universidad (1980).