Олимпиада ИТМО 2020

1. Посчитайте $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2. Пусть A и B — две ортогональные матрицы $n \times n$ с вещественными элементами. Чему равно максимальное значения $\det(A+B)$? (Найти и доказать.)

3. Найдите $\max\limits_{\substack{a,b,c>0\\ a+b+c=1}} a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$.

4. Найдите все корни, включая комплексные, у полинома $(x+1)^{90}+(x-1)^{90}$.

5. Двумерный квадрат со стороной 10 содержится в n-мерном кубе со стороной 1. При каком минимальном n это выполнимо?

6. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f(1)=1$. Найдите все функции f, такие что $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$ при $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при $x,y\in\mathbb{R}$.

7. Найдите все функции f, удовлетворяющие $(1+x^2)f'(x)+xf(x)=1$.

8. Найдите все точки $P=(r,0)$ на горизонтальной оси с $r\in\mathbb{Q}$, такие что расстояния от P до вершин квадрата $(\pm1,\pm1)$ рациональны.

9. Посчитайте $\det\begin{pmatrix} a & b & b & b & b\\ a & c & d & d & d\\ a & c & e & f & f\\ a & c & e & g & h\\ a & c & e & g & i\end{pmatrix}$.

10. Пусть $P(x)=2x^3-3x^2+2$, $A=\{P(n)\,|\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, n\le 1999\}$, $B=\{p^2+1\,|\,p\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ и $C=\{q^2+2\,|\,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Докажите, что множества $A\cap B$ и $A\cap C$ содержат одинаковое число элементов.

Олимпиада ИТМО 2020

1. Посчитайте $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

2. Пусть A и B — две ортогональные матрицы $n \times n$ с вещественными элементами. Чему равно максимальное значения $\det(A+B)$? (Найти и доказать.)

3. Найдите $\max\limits_{\substack{a,b,c>0\\ a+b+c=1}} a+\sqrt{b}+\sqrt[3]{c}$.

4. Найдите все корни, включая комплексные, у полинома $(x+1)^{90}+(x-1)^{90}$.

5. Двумерный квадрат со стороной 10 содержится в n-мерном кубе со стороной 1. При каком минимальном n это выполнимо?

6. Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и $f(1)=1$. Найдите все функции f, такие что $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}\cdot f(x)$ при $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $f(x+y)=f(x)+f(y)$ при $x,y\in\mathbb{R}$.

7. Найдите все функции f, удовлетворяющие $(1+x^2)f'(x)+xf(x)=1$.

8. Найдите все точки $P=(r,0)$ на горизонтальной оси с $r\in\mathbb{Q}$, такие что расстояния от P до вершин квадрата $(\pm1,\pm1)$ рациональны.

9. Посчитайте $\det\begin{pmatrix} a & b & b & b & b\\ a & c & d & d & d\\ a & c & e & f & f\\ a & c & e & g & h\\ a & c & e & g & i\end{pmatrix}$.

10. Пусть $P(x)=2x^3-3x^2+2$, $A=\{P(n)\,|\,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, n\le 1999\}$, $B=\{p^2+1\,|\,p\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$ и $C=\{q^2+2\,|\,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$. Докажите, что множества $A\cap B$ и $A\cap C$ содержат одинаковое число элементов.