1. (*Hong Kong TST 2016, 1.4*)
$q = 2$ — не подходит, значит, q — нечётное.
$2^m p^2 + 1 = q^7 \Leftrightarrow 2^m p^2 = (q-1)(q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1) = (q-1)f(q)$. Вторая скобка справа нечётна, так как q — нечётно. Значит, $q-1$ делится на 2^m.
Получается, что $\frac{q-1}{2^m}f(q) = p^2$. Так как p — простое, у нас имеется три случая: $(\frac{q-1}{2^m}, f(q)) \in \{(1,p^2),(p,p),(p^2,1)\}$. Но известно, что $f(q) > \frac{q-1}{2^m}$, значит, $\frac{q-1}{2^m} = 1$ и $f(q) = p^2$. Получаем, что $q = 2^m+1$. Подставляя в $f(q)$: $f(q) = 2^m k + 7$, для какого-то натурального k.
Если $m > 1$, тогда $f(p) \bmod 4 = 3$, а $p^2 \bmod 4 = 0, 1$. Противоречие.
Значит, $m = 1$ и $q = 3$. Проверяем: $p^2 = f(3) = 1093$, что не является квадратом.
Итого: таких p, q, m не существует.
2. (*IMC 1999, 2.1*)
$0 = (x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = 0 + xy + yx + 0$. Тогда $xy = -yx$. Применяем эту перестановку 3 раза к abc: $abc = -bac = bca = -abc$.
3. (*IMC 1999, 2.3*)
Заменим, x_i на $a_i - 1$ и $a_i \geq 0$. Тогда известно, что $0 = \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-1)^3 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 - 3\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + 3\sum\limits_{i=1}^{n} a_i - n = 0$.
Сейчас мы хотим доказать, что: $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i - 1) \leq \frac{n}{3} \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq \frac{4n}{3}$.
Выражая n из первого равенства, мы хотим доказать: $3\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \leq 4n = 4\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^3 - 12\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 + 12\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$.
Последнее неравенство равносильно: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(2a_i-3)^2 \geq 0$.
4. (*Croatia TST 2016*)
Если $p = q$, то $p^2 - p - 1 = 2p + 3 \Leftrightarrow p^2 - 3p - 4$. Не имеет хороших решений.
Тогда $p \neq q$, а, значит, $2q+3$ делится на p. Пусть $2q + 3 = kp$ для какого-то k. Тогда уравнение эквивалентно: $p(p^2-p-1) = \frac{kp-3}{2}kp \Leftrightarrow 2(p^2-p-1) = k(kp-3) \Leftrightarrow 2p^2 - (k^2+2)p + (3k-2) = 0$
Так как p — целое, то дискриминант последнего квадратного уравнения относительно p тоже должен быть целым. $\Delta = (k^2+2)^2 - 8(3k-2)$.
Несложно заметить, что при $k \geq 11$ дискриминант лежит между двумя последовательными квадратами $(k^2+1)^2 < \Delta < (k^2+2)^2$, а, значит, не может быть квадратом.
Проверяя последовательно все $k \leq 10$, получаем ответ при $k = 5$: $(p, q) = (13, 31)$.
5. (*Japan MO 2016 Q1*)
Утверждение: Любое $1 < m < p$ вносит вклад только в одно $a_1, \ldots, a_{p-1}$.
Доказательство: В a_k, где $k \geq m$, m вносить ничего не может по условию. Следует рассматривать только $a_1, \ldots, a_{m-1}$.
Рассмотрим соответствующие им числа из условия: $p+1, 2p+1, \ldots, (m-1)p+1$. Так как НОД$(m,p) = 1$, то только одно из них может делиться на m.

Итого, каждое m вносит вклад только в одно из a_i, то есть ровно 1 в итоговую сумму. Значит, $a_1 + a_2 + \ldots + a_{p-1} = p - 2$.
6. (*Miklos Schweitzer 2015, P4*)
Теорема Сильвестра. Произведение k подряд идущих чисел больше k делится на простое больше k.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — простые числа. Будем доказывать по индукции, что последовательность $a_{p_k+1}, \ldots, a_{p_{k+1}}$ является перестановкой $p_k + 1, \ldots, p_{k+1}$.
База. $a_1 = 1$. Найдём a_2. Отметим, что a_2 не должно иметь остаток 1 по любому простому модулю p, иначе, набор $\{a_1, \ldots, a_p\}$ будет иметь два единичных остатка. Значит, $a_2 - 1$ не должно делиться ни на одно простое, то есть $a_2 - 1 = 1$, значит, $a_2 = 2$.
Аналогично, с a_3: a_3 не должно иметь остатка 1 и остатка 2 по модулю любого простого $p > 2$. То есть $a_3 - 1$ и $a_3 - 2$ являются степенями двойки. Такое возможно, только если $a_3 = 3$.
Переход. Мы хотим доказать для индексов $p_k + 1, \ldots, p_{k+1}$. Рассмотрим, a_m с $p_k + 1 \leq m \leq p_{k+1}$. Аналогично рассуждениям из Базы: $a_m - a_1, a_m - a_2, \ldots, a_m - a_{p_k}$ не должны делиться на простое больше или равное p_{k+1}. По предположению индукции $\{a_1, \ldots, a_{p_k}\}$ являются перестановкой $\{1, 2, \ldots, p_k\}$. Значит, $a_m - 1, a_m - 2, \ldots, a_m - p_k$ не должны делиться на простое больше или равное p_{k+1}, иначе, для этого простого будет два одинаковых остатка.
Пусть $a_m > p_{k+1}$. Рассмотрим 2 случа:

1. $a_m \leq p_k + p_{k+1}$. Тогда какое-то из $a_m - 1, \ldots, a_m - p_k$ делится на p_{k+1}.
2. $a_m > p_k + p_{k+1}$. Тогда все $a_m - 1, \ldots, a_m - p_k$ больше p_k, и по теореме Сильвестра какое-то из чисел делится на простое большее p_k.

Получаем, что $p_k < a_m \leq p_{k+1}$. Значит, $a_{p_k+1}, \ldots, a_{p_{k+1}}$ являются перестановкой $p_k+1, \ldots, p_{k+1}$.

Итак, мы доказали, что $a_1, \ldots, a_{p_k}$ является перестановкой $1, \ldots, p_k$ для любого k. Из теории чисел известно, что $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{p_{k+1}-p_k}{p_k} = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$.

7. (*artofproblemsolving.com*)

Стандартная замена, если видишь $abc = 1$: $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$.

Подставляем: $\frac{x}{z} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} \leq \frac{xy}{z^2} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} \Leftrightarrow x^3y^2z + xy^3z^2 + x^2yz^3 \leq x^3y^3 + y^3z^3 + z^3x^3$.

Легко собирается из трёх неравенств средних арифметических/средних геометрических:

$x^3y^3 + x^3y^3 + z^3x^3 \geq 3x^3y^2z$

$y^3z^3 + y^3z^3 + x^3y^3 \geq 3xy^3z^2$

$z^3x^3 + z^3x^3 + z^3y^3 \geq 3x^2yz^3$

8. (*IMC 2003, 1.4*)

Можно считать, что НОД$(a,b) = 1$, так как иначе поделим на их общий делитель. Далее рассмотрим элемент 1. Он находится либо в A, либо в B. Значит, либо a делится на b, либо наоборот. Это возможно только при $(a,b) = (1,n)$ или $(a,b) = (n,1)$. При таком условии положительные числа можно разбить на две группы.

Рассмотрим случай, когда $(a,b) = (1,n)$. Пусть $f(k)$ — максимальная степень n, на которую делится k. Тогда: $A = \{k : f(k) \text{ — чётно}\}$ и $B = \{k : f(k) \text{ — нечётно}\}$.

9. (*IMC 2003, 1.2*)

$S = a_1 + \ldots + a_51$, тогда $b_1 + \ldots + b_51 = 50S$. Так как b является перестановкой a, то $50S = S$, или $49S = S$.

Пусть характеристика поля не 7. Тогда $S = 0$, тем самым $b_i = a_1 + \ldots + a_51 - a_i = -a_i$. С другой стороны, b является перестановкой a и $b_i = a_{\pi(i)}$. Пусть характеристика поля не 2, тогда набора чисел a разбивается на пары противоположных чисел: $a_i \leftrightarrow a_{\pi(i)}$, хотя 51 является нечётным числом.

Характеристики 2 и 7 удовлетворяют условию задачи. Для 7: поле по модулю 7 и $a_i = 1$. Для двух удовлетворяет любое поле с $S = 0$.