**Уравнение Морделла** $y^2 = x^3 + k$, при $k \in \mathbb{Z}$ имеет только конечное число решений в целых числах.
1. Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, таких что $y^2 = x^3 + 16$.
2. Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, таких что $y^2 = x^3 - 1$.

**Уравнение Пелля:** $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ при натуральном $n$, неявляющимся квадратом. Сначала находится тривиальное решение $(x_1, y_1)$. Каждое следующее: $x_k + y_k \cdot \sqrt{n} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k$. $(x_k, y_k) = (\frac{1}{2}((x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k + (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{n})^k), \frac{1}{2\sqrt{n}}((x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k - (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{n})^k)$

**Отрицательное уравнение Пелля:** $x^2 - n \cdot y^2 = -1$ при натуральном $n$, неявляющимся квадратом. Сначала находится тривиальное решение $(x_1, y_1)$. Каждое следующее: $x_k + y_k \cdot \sqrt{n} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^{2k-1}$.
3. Покажите, что $x^2 + y^3 + z^3 = t^4$ имеет бесконечно много решений в целых числах с наибольшим общим делителем 1.
4. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, такие что $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ для каких-то $k < n$.
5. Докажите, что если разность двух кубов равна $n^2$, при $n \in \mathbb{N}$, тогда $2n - 2$ тоже квадрат.
6. Найдите натуральные числа $x$, $y$ и $z$, такие что $3^x - 1 = y^z$.
7. Покажите, что существует бесконечно много натуральных чисел $n$, таких что $n$, $n+1$ и $n+2$ являются суммой квадратов двух целых чисел.
8. Докажите, что существует единственная пара натуральных чисел $a$ и $n$, что $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.
9. Покажите, что для всех положительных $a, b, c, d$ выполняется $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$.
10. Докажите, что для всех неотрицательных троек $a, b, c \leq 1$ выполняется $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \leq 1$.
11. Докажите, что для всех положительных $a, b, c$ с $abc = 1$ выполняется $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.

---

**Уравнение Морделла** $y^2 = x^3 + k$, при $k \in \mathbb{Z}$ имеет только конечное число решений в целых числах.
1. Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, таких что $y^2 = x^3 + 16$.
2. Найдите все пары целых чисел $(x, y)$, таких что $y^2 = x^3 - 1$.

**Уравнение Пелля:** $x^2 - n \cdot y^2 = 1$ при натуральном $n$, неявляющимся квадратом. Сначала находится тривиальное решение $(x_1, y_1)$. Каждое следующее: $x_k + y_k \cdot \sqrt{n} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k$. $(x_k, y_k) = (\frac{1}{2}((x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k + (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{n})^k), \frac{1}{2\sqrt{n}}((x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^k - (x_1 - y_1 \cdot \sqrt{n})^k)$

**Отрицательное уравнение Пелля:** $x^2 - n \cdot y^2 = -1$ при натуральном $n$, неявляющимся квадратом. Сначала находится тривиальное решение $(x_1, y_1)$. Каждое следующее: $x_k + y_k \cdot \sqrt{n} = (x_1 + y_1 \cdot \sqrt{n})^{2k-1}$.
3. Покажите, что $x^2 + y^3 + z^3 = t^4$ имеет бесконечно много решений в целых числах с наибольшим общим делителем 1.
4. Найдите все $n \in \mathbb{N}$, такие что $\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ для каких-то $k < n$.
5. Докажите, что если разность двух кубов равна $n^2$, при $n \in \mathbb{N}$, тогда $2n - 2$ тоже квадрат.
6. Найдите натуральные числа $x$, $y$ и $z$, такие что $3^x - 1 = y^z$.
7. Покажите, что существует бесконечно много натуральных чисел $n$, таких что $n$, $n+1$ и $n+2$ являются суммой квадратов двух целых чисел.
8. Докажите, что существует единственная пара натуральных чисел $a$ и $n$, что $a^{n+1} - (a+1)^n = 2001$.
9. Покажите, что для всех положительных $a, b, c, d$ выполняется $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}$.
10. Докажите, что для всех неотрицательных троек $a, b, c \leq 1$ выполняется $\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{c+a+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a) \cdot (1-b) \cdot (1-c) \leq 1$.
11. Докажите, что для всех положительных $a, b, c$ с $abc = 1$ выполняется $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.