1. $y^2 = x^3 + 16 \Leftrightarrow (y-4)\cdot(y+4) = x^3$.

Если y — нечётное, то НОД$(y-4, y+4) = 1$. Следовательно $y-4$ и $y+4$ — кубы.

Если y — чётное, то x тоже. Заменим y на $2y$, а x на $2x$. При подстановке и сокращении на 4 получим, $y^2 = 2\cdot x^3 + 4$. Обе части делятся на 4, значит, x и y снова чётные. Приводим аналогичную замену. $y^2 = 4\cdot x^3 + 1$. В этот раз y уже нечётное. Заменим, $y = 2m+1$ и подставим. $4\cdot x^3 = (y-1)\cdot(y+1) = 2m\cdot(2m+2) \Leftrightarrow x^3 = m\cdot(m+1)$. Это означает, что m и $(m+1)$ являются кубами, то есть $m = -1, 0$. Подставляя, получаем, что $(x, y) = (0, \pm 4)$

2. $y^2 = x^3 - 1$. Первым делом по модулю 8 получаем, что x — нечётное, а y — чётное.

$x^3 = (y+i)\cdot(y-i)$. Докажем, что $(y+i)$ и $(y-i)$ взаимнопросты в $\mathbb{Z}[i]$. Пусть $y+i$ и $y-i$ делятся на θ. Тогда $2i = (y+i)-(y-i)$ делится на θ. Следовательно, $N(\theta)$ делит $N(2i) = 4$, где $N(x)$ — норма x. Также $N(\theta)$ делит $N(y+i) = y^2+1$, что нечётно. Получается, что $N(\theta) = 1$. А значит, $y+1$ и $y-1$ взаимнопросты.

Так как $(y+i)$ и $(y-i)$ взаимнопросты, а их произведение — куб, то $(y+i)$ является $\theta\cdot(m+ni)^3$, где θ имеет норму 1. Заметим, что θ с нормой 1 всегда является кубом, а, значит, можно сказать, что $\theta = 1$.

$y+i = (m+ni)^3$. Раскорем скобки, и получим: $y = m^3 - 3\cdot m\cdot n^2$ и $1 = 3\cdot m^2\cdot n - n^3 = n(3\cdot m^2 - 1)$. Подходит только $m = 0$ и $n = -1$. Значит, $y = 0$, а $x = 1$.

3. Рассмотрим, $\left(\frac{(n-2)\cdot(n-1)}{2}\right)^2 + (n-1)^3 + n^3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3 + n^3 = \left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)^2$. Осталось понять, что $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ бесконечно раз является квадратом. $\frac{n\cdot(n+1)}{2} = m^2 \Leftrightarrow n^2 + n = 2\cdot m^2 \Leftrightarrow (2\cdot n+1)^2 - 2\cdot(2\cdot m)^2 = 1$. Последнее является уравнением Пелля.

4. Если всё раскрыть и привести к общему знаменателю, получаем: $2\cdot k^2 + 2\cdot k = n^2 + 3n + 2 \Leftrightarrow (2n+3)^2 + 1 = 2(2k+1)^2$. Решаем $x^2 - 2y^2 = -1$, фундаментальное решение $(x_1, y_1) = (1, 1)$. x_i и y_i всегда нечётные, значит, $n = \frac{x_i - 3}{2}$ и $k = \frac{y_i - 1}{2}$.

5. Пусть два соседних куба будут m и $m+1$. Тогда $n^2 = (m+1)^2 - m^2 = 3m^2 + 3m + 1 \Rightarrow (2n)^2 = 3\cdot(2m+1)^2 + 1$. Это является уравнением Пелля $x^2 - 3\cdot y^2 = 1$. Пара $(x, y) = (2, 1)$ является фундаментальным решением, тогда $2\cdot n + (2m+1)\cdot\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^l$. Заметим, что $2\cdot n$ — чётное, а значит, l должно быть нечётным: $l = 2k+1$. Складывая предыдущее равенство с $2\cdot n - (2m+1)\cdot\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^l$, получаем $4\cdot n = (2+\sqrt{3})^{2k+1} + (2-\sqrt{3})^{2k+1} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}\cdot(2+\sqrt{3})^{2k} + \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}\cdot(2-\sqrt{3})^{2k}$. (Так как $(1\pm\sqrt{3})^2 = 2\cdot(2\pm\sqrt{3})$)

Продолжая, получаем $2\cdot n - 2 = \frac{(1+\sqrt{3})^2\cdot(2+\sqrt{3})^{2k} + (1-\sqrt{3})^2\cdot(2-\sqrt{3})^{2k} - 8}{4} = \frac{1}{4}\cdot((1+\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^k + (1-\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3})^k)^2$.

6. Первым делом, возьмьём по модулю 3, и поймём, что z не может быть чётным. Пусть $z = 2k+1$.

$3^x = y^{2k+1} + 1 = (y+1)\cdot(y^{2k} - y^{2k-1} + \ldots + 1)$. Из первой скобки получаем $y \underset{3}{\equiv} -1$, значит, $y^{2k} - y^{2k-1} + \ldots \underset{3}{\equiv} 2k+1 \underset{3}{\equiv} 0$. Значит, $2k+1$ делится на 3. Значит, $z = 3p$.

$3^x = y^{3p} + 1 = (y^p+1)\cdot(y^{2p} - y^p + 1)$. Значит, $y^p = 3^s - 1$. Подставим. $3^x = y^{3p} + 1 = 3^{3s} - 3^{2s+1} + 3^{s+1}$. Последнее может быть степенью тройки только при $s = 1$.

7. Рассмотрим уравнение Пелля $x^2 - 2\cdot y^2 = 1$. Из каждой пары (x, y) получаем тройку подряд идущих чисел $(y^2 + y^2, x^2 + 0^2, x^2 + 1^2)$.

8. Прибавим 1 к обоим частям, и обнаружим, что a делит 2002.

Далее рассмотрим по модулю 3, и получим, что $a \underset{3}{\equiv} 1$. Также получаем, что n должно быть чётно.

Далее рассмотрим по модулю 4. Получаем, что a должно быть нечётным. А если точнее $a \underset{4}{\equiv} 1$.

a должно делить $2002 = 2\times 7\times 11\times 13$. Так как $a \underset{3}{\equiv} 1$ и нечётно, то a может делить только 7×13. И наконец, так как $a \underset{4}{\equiv} 1$, то a делит 13.

Отметим, что $a = 1$ не подходит. При $a = 13$, $n = 2$ подходит. Пусть подходит n больше, тогда $13^{n+1} \underset{8}{\equiv} 2001 \underset{8}{\equiv} 1$, но так как n — чётно, то $13^{n+1} \underset{8}{\equiv} 13$.

9. КБШ. $(a+b+c+d)\cdot(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2^2}{c} + \frac{4^2}{d}) \geq (1+1+2+4)^2 = 64$.

10. Возьмём вторую производную по a. $f''(a) = \frac{2b}{(c+a+1)^3} + \frac{2c}{(a+b+1)^3} \geq 0$. Значит, максимум f наблюдается в крайних значениях. Проверяем.

11. Сделаем замену: $x = \frac{1}{a}$, $y = \frac{1}{b}$ и $z = \frac{1}{c}$. Тогда, $\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = A$.

Рассмотрим выпуклую функцию $f(x) = \frac{1}{x}$. $A = x\cdot f(\frac{y+z}{x}) + y\cdot f(\frac{z+x}{y}) + z\cdot f(\frac{x+y}{z}) \underset{\text{By Jensen}}{\geq}$

$$(x+y+z)\cdot f\left(\tfrac{(y+z)+(z+x)+(x+y)}{x+y+z}\right) = \tfrac{x+y+z}{2} \underset{\text{AM-GM}}{\geq} \tfrac{3}{2}.$$